Willard Quine

El sentido de la nueva lógica

colección interciencia

Editorial Nueva Visión Buenos Aires

"Para justificar un estudio profundo de la parte técnica de la lógica teórica —afirma W. Quine en el prefacio a la edición brasileña de *El sentido de la nueva lógica*— es indispensable comprender la significación filosófica y práctica de la lógica moderna. Pero, recíprocamente, también se necesita algún conocimiento de las ideas lógicas para advertir las implicaciones filosóficas y prácticas de esa teoría. Este libro constituye una introducción tanto a la parte teórica moderna como a sus consecuencias generales".

Con motivo de la reunión del último Congreso Internacional de Filosofía, realizado en Washington, se presentó a Willard Quine como la máxima autoridad viviente en lógica. Quien ostenta tan alto galardón se ha allanado a introducir al público no especializado en los principios fundamentales de la lógica moderna, poniéndola aun al alcance de aquellos que no posean una anterior preparación.

El autor se propuso lograr la conciliación de tres objetivos fundamentales: el rigor en los detalles teóricos, la conveniencia en las aplicaciones prácticas y la sencillez de la presentación. Por ello tuvo especial cuidado en limitar su exposición a los capítulos esenciales de la lógica, omitiendo todo aquello que pudiera considerarse como complementario. De este modo, logró concentrar la atención en las consecuencias filosóficas de sus planteos y evitar que la obra se prolongara innecesariamente con detalles y demostraciones que no son imprescindibles.

Willard Quine nació en Akron, Ohio, en 1908. Estudió filosofía con Whitehead en la Universidad de Harvard y luego, en Europa, con Carnap, Tarski y otros. Es profesor de la Universidad de Harvard desde 1936, y profesor visitante de las de Oxford (1953-4) y Sao Paulo (1942). Es miembro del Institute for Advanced Studies de Princeton y de otras instituciones científicas. Más de 70 artículos llevan su firma y ha publicado los siguientes libros: *A System of Logistic* (1934), *Mathematical Logic* (1940, 1951), *Elementary Logic* (1941), *Methods of Logic* (1950), *From a Logical Point of View* (1953).

Otros títulos de esta colección:

1. E. E. Evans Pritchard: Antropología social
2. Sir Charles Sherrington y otros: Las bases físicas de la mente
3. Alberto E. Merani: Del niño al hombre social

En preparación:

Hermann Weyl: La simetría en la ciencia y en el arte
W. Ross Ashby: Introducción a la cibernética
Jean Piaget y otros: Psicología, lógica y comunicación

4. Willard Quine: El sentido de la nueva lógica

Colección "Interciencia"
Dirigida por Jorge J. Goldemberg y Manuel Sadosky

Willard Quine

El sentido de la nueva lógica

Traducción de Mario Bunge

Editorial NV Nueva Visión Buenos Aires

Título del original en portugués: "O sentido da Nova Logica"
Publicado por Livraria Martins Editora, San Pablo, 1944
Primera edición en castellano: 1958.

© by Nueva Visión S. R. L., Cerrito 1371, Buenos Aires, 1958
Impreso en la Argentina / Printed in Argentina
Queda hecho el depósito que previene la ley 11.723

Presentación de la edición castellana

Hace unos años, en 1947, se cumplió el centenario de la publicación de *The Laws of Thought* de George Boole, el primer tratado moderno de lógica [1]. En el siglo transcurrido, se amplió y modificó radicalmente el campo de las ciencias y en consecuencia, el de las doctrinas filosóficas que las acompañan. No obstante, los trabajos de Boole persisten en el tiempo y, —con el complemento de los de Schröder y Frege—, siguen siendo hoy un instrumento importante para la lógica moderna y la fundamentación filosófica. Lo mismo puede decirse de otros investigadores de esta ciencia especial.

¿Cómo pudo darse esta permanencia, en un área de la cultura tan sometida a evoluciones rápidas, en que las teorías son constantemente puestas a prueba y verificación sobre nuevos datos? Responder entraña una definición de la lógica simbólica y obliga a señalar su importancia.

Porque la lógica, lo explica Quine, "... trata de todo. No en el sentido de que la lógica es una ciencia universal, que abarque toda otra ciencia y de cuyas leyes puedan deducirse las leyes de cualquiera ciencia especial. La lógica no es en tal sentido una ciencia universal; pero sí es una ciencia *general*, en el sentido de que las verdades lógicas se refieren a objetos cualesquiera...". "Por lo tanto

[1] Históricamente, Boole no fué el primer logístico. Quine ha trazado en la Introducción una síntesis evolutiva que arranca de Leibniz. Hubo logísticos anteriores aun a este filósofo, que solo abordaron aspectos aislados del problema. Recientemente, se ha puesto en evidencia el valor de ciertos antiguos tratados hindúes donde ya se preconizan la técnica de simbolización y el cálculo de dos proposiciones.

no podemos decir que la lógica *incluye* las demás ciencias, pero sí que está *incluida* en todas las otras ciencias, de manera que forma la parte común de todas ellas. La lógica es, como lo sugiriera Tarski, el común denominador de las ciencias especiales". Por tal razón, a medida que crece y se diversifica nuestro acervo científico, aumentan las posibilidades de empleo de los procedimientos lógicos, con el fin de obtener un principio operador en todas y cada una de las ciencias.

En todos los casos se trata de obtener generalizaciones que culminen en abstracciones ordenadas. Como lo indica Suzanne K. Langer, "las diversas ramas de la lógica son otros tantos estudios de generalización. Los propósitos de la investigación lógica pueden variar según los intereses de los investigadores —uno puede interesarse en la lógica aristotélica, otro en la de las matemáticas, un tercero en los cánones de la ciencia, un cuarto en la relación entre las matemáticas y la ciencia, o entre las matemáticas y la lógica clásica, etc.— pero el procedimiento es en todos los casos el mismo: una progresiva sistematización y generalización. Paralelamente, el criterio a seguir es siempre el mismo: el descubrimiento de *formas abstractas*. Lo último distingue a la lógica de las ciencias naturales, que buscan formas generales, pero no abstractas" [2].

Naturalmente, para llegar a esta abstracción se apela a un sistema de símbolos —o denotaciones lógicas— que esquematizan la representación de los términos de la realidad en "proposiciones". Mediante este recurso es posible que todas las cuestiones puedan reducirse a la técnica lógica, con independencia de la variabilidad del objeto en el campo real; gracias a ello se puede analizar las muy complejas relaciones de tal campo de objetos con otros. En términos más precisos, dice Wittgenstein: "... la explicación idealista de la visión de relaciones espaciales, como 'espectáculos espaciales', no es apta, porque no puede explicar la multiplicidad de estas relaciones. La realidad es comparable con la proposición. Las proposiciones pueden ser verdaderas sólo por su representación de la realidad..." [3].

[2] S. K. Langer: *An Introduction to Symbolic Logic*, New York 1953, p. 17.
[3] L. Wittgenstein: *Tractatus Logico-philosophicus*, Londres 1947, p. 71, ac. 4.0412-06.

"... Aquello que se expresa *por sí mismo* en el lenguaje, no lo podemos *nosotros* expresar mediante el lenguaje. Las proposiciones *muestran* la forma lógica de la realidad. La exhiben" [4]. "... La proposición es una imagen de un estado de cosas únicamente cuando se halla lógicamente articulada. En la proposición debe haber exactamente tantos objetos como los hay en el estado de cosas que representa" [5].

Sobre la base de estos principios, instrumentalizados, se puede afirmar la posibilidad de reducir a formas lógicas conjuntos discretos de fenómenos reales.

Creemos que la importancia práctica de este procedimiento —cuando se trata de ciencias, de explicitaciones ordenadas de la realidad— es obvia como *posibilidad*. Subrayamos esta última palabra, así como la frase anterior, de "conjuntos discretos". Efectivamente, no toda forma de realidad ha sido, hasta la fecha, reducida a términos lógicos de operación. Acerca de esta limitación no nos corresponde hablar aquí, pero remitimos al lector a fuentes más autorizadas, como son las páginas de Quine que siguen o la pieza magistral que es la obra antes citada de Wittgenstein.

El progreso de las matemáticas y la física teórica está ligado muy especialmente al de la lógica matemática por la contextura conceptual de estas disciplinas y porque, como lo señala la historia sucinta que traza Quine al comienzo de su libro, fue desarrollada por individuos que eran a la vez lógicos y matemáticos. Esta dualidad de sus creadores surgió de la necesidad de esclarecer problemas que atañen tanto a la fundamentación física como a la matemática, a partir del momento en que se alcanzó en ellas un intenso nivel de especialización.

Tal vez esto basta para explicar la vigencia creciente de tratados como el de Boole.

El campo de la lógica simbólica, por más que se lo pretenda señalar como restricto, no se limita a las ciencias físico-matemáticas. Cala hasta la entraña misma de la filosofía, como lo demues-

[4] op. cit., p. 79, ac. 4.121
op. cit., p. 71, ac. 4.04

tra la escuela empíreo-logicista, de origen austríaco, que se difundió hasta ser hoy la más pujante y firme doctrina filosófica. Precisamente a figuras como Schlick, Gödel, Neurath, Wittgenstein, Carnap y otros se debe la integración de la lógica en la explicitación básica de las ciencias, el derrumbe de la metafísica clásica y la aparición de nuevas y esenciales orientaciones gnoseológicas. "Consideraban que el filósofo tenía un importante papel que realizar, y analizaron y clasificaron no sólo los conceptos que aparecen en el uso cotidiano y científico del lenguaje, sino esencialmente en el uso mismo de la ciencia; y esto último fue considerado por ellos como su finalidad más importante. La filosofía debía convertirse en la lógica de la ciencia. En cierto sentido, la filosofía había de amalgamarse con la ciencia. No habría un conjunto de preceptos filosóficos incrustados en otros de naturaleza científica; los preceptos científicos se refinarían mediante el análisis lógico" [6]. O bien, como lo sintetizó Wittgenstein en una enérgica y célebre expresión: "El objeto de la filosofía es la clasificación lógica de los pensamientos. *La filosofía no es una teoría sino una actividad*" [7].

Testimonio parcial de esta audaz empresa es la obra inconclusa *Encyclopedia of Unified Science*, en la que un grupo de filósofos, en su mayoría provenientes del "Círculo de Viena" y encabezados por Otto Neurath, se esforzaron por llevar los aportes de su filosofía a numerosos aspectos de la ciencia. Un importante sector de la misma está consagrado a problemas de técnica lógica.

Algunos expertos podrán objetar los alcances universalistas de esta posición filosófica, pero lo cierto es que ella significó un cambio radical en la actitud del filósofo. Este pasó a ser no sólo un teórico, sino un hombre en "actividad" (al decir de Wittgenstein), cuya filosofía resulta inseparable del devenir de toda ordenación posible de la realidad, especialmente de las ciencias y su raciocinio.

Como dijéramos, no todas las vías científicas han sido exploradas. La más fecunda ha sido hasta ahora la aplicación de la lógica a las

[6] A. J. Ayer: "The Vienna Circle", en *The Revolution in Philosophy*, Londres, 1957, p. 79.

[7] Op. cit., p. 77, ac. 4.112.

matemáticas. En el último capítulo de este libro, Quine desarrolla con preferencia lo referente a la técnica de la cuantificación, especialidad que se aplica a dicha cuestión.

Si, implícitamente, toda forma de conocimiento permite ser examinada en términos lógicos, sin embargo es necesario que dicho conocimiento haya alcanzado —creemos— un volumen de contenidos y una especificación de relación mínimos para que pueda aplicarse la técnica lógica. Varias son las disciplinas que ya se están sometiendo a este análisis. Las tentativas que más se han divulgado son la *lógica jurídica* (que trata principalmente de problemas semánticos) y la *teoría de los circuitos* aplicada a la teoría de la información, base de la cibernética. Quine presenta en el texto una aplicación referida a Shannon.

A título de ejemplo nos detendremos en otras dos esferas donde la aplicación de la lógica simbólica está dando interesantes resultados. En ellas se demuestra con máxima sencillez la manera como la lógica "está incluída en todas las ciencias".

Nos referimos a la lógica de la estética y la lógica en las ciencias sociales. Respecto de la primera, cabe señalar los trabajos de tanteo de Max Bense, en Alemania, y —con éxito sensiblemente menor— los de Hayakawa en Estados Unidos. Esquemáticamente, el empleo de gran número de formas esenciales y restrictas (atómicas, en términos de lógica), y la búsqueda de relaciones concretas entre ellas, ha puesto al arte moderno en condiciones de emplear estas técnicas aplicándolas a la resolución coherente de correlatos estéticos complejos. Para ello, la "materia estética" puede ser reducida a proposiciones —únicamente con fines operacionales— y su estructuración da margen a posibilidades logísticas. Ello entraña un enriquecimiento extraordinario de dicha materia y la aparición de modificaciones de fondo en la manera de composición artística (similar entonces, dentro de determinadas restricciones, a la composición lógica). Aclaramos que, en todos los casos, se trata de la ordenación de un material estético, de una imagen sensible existente. Esto podría señalarse como en vías de realización para la pintura, pero otro tanto cabría decir, con pruebas y procedimientos menos

evidentes, para la resolución de situaciones espaciales en arquitectura.

Más completos son los intentos realizados en el campo de la sociología y la psicología. Desde hace tiempo, varios antropólogos y sociólogos abogan por el empleo de procedimientos logísticos para analizar con un método unitario el material, extraordinariamente diversificado, que las técnicas modernas de investigación permiten reunir en lo que respecta a relaciones interpersonales. Guillin dice al respecto: "... todo procedimiento que pueda contribuir a esclarecer (las ciencias sociales) debe ser cuidadosamente explorado y probado...". "El uso de la lógica simbólica y otros tipos de simbolización 'neutral' es, como sugieren en ciertos círculos, un medio de incrementar la precisión en la disquisición teórica dentro de la ciencia del hombre social, al menos en relación con ciertos problemas"[8].

Como concreción primera citemos el sorprendente conjunto de estudios incluídos en la obra compilada por R. Lazarsfeld, *Mathematical Thinking in the Social Sciences* [9], especialmente los referentes a la predicción de la conducta de grupos en estudios de opinión pública y al cálculo matricial.

"Teoría de los modelos matemáticos" aplicada a la sociología es la denominación específica que ha recibido esta rama; se basa en una fundamentación logística de problemas estadísticos. Su empleo en diversas cuestiones permite explicar, mediante estructuras matemáticas generales, las formas de comportamiento, para analizarlas en cada caso como proposiciones lógicas polivalentes. El futuro de esta técnica es promisorio y dista de haber llegado a su culminación.

Todavía más precisas son las investigaciones lógicas en el campo de la psicología; mencionaremos, entre otros, el trabajo de O. K. Moore y S. B. Anderson [10] sobre el análisis de las interacciones en

[8] J. Guillin: *For a Science of Social Man*, New York, 1954, p. 273.
[9] Free Press, Glencoe, 1954.
[10] Incluído en "Small Group Research", compilado por F. L. Strodbeck, número especial de la *American Sociological Review*, Dic. 1954, p. 702-711.

un grupo reducido de personas. Estas interacciones se presentaban a través de diálogos o conversaciones. La ordenación de las "conductas observadas", con miras a su estudio ulterior, fué hecha en términos de cálculo de dos proposiciones, y se empleó la técnica lógica tal como se la explica en las páginas siguientes (Cap. 1). Ya más amplios son los estudios que J. Piaget está realizando en Ginebra, con un grupo de lógicos y cibernéticos (Beth, Lorenzen, etc.), con el objeto de establecer una correlación entre las formas lógicas del lenguaje y los actos espontáneos, esfuerzo que puede ser considerado como el más vasto realizado hasta la fecha [11].

Se podría seguir enunciando otras experiencias en curso de ejecución, con intención de discutir su grado de validez o de polemizar acerca de la medida en que tratan de términos lógicos verdaderos, o bien si son meras proposiciones incompletas traducidas como símbolos. Dejamos esta discusión a los especialistas (deliberadamente hemos omitido referirnos a la semántica general, donde aquella denegación tendría mayor derecho).

A modo de conclusión, y éste era nuestro objeto, hemos querido ejemplificar con los casos citados dos cuestiones básicas en el contexto de nuestra presentación: 1°) La lógica simbólica tiene aplicación real en las áreas más diversas. Es la ciencia interdisciplinaria por excelencia y el fundamento primero de lo que podría denominarse "interciencia". 2°) Sus recursos de ordenación, de técnica del pensar, pueden referirse a las situaciones más complejas y permiten multiplicar dicho desarrollo, no ya por la vía del tanteo o la experimentación cruda, sino merced al empleo de una técnica racional. En este sentido, cualquier individuo que manipule en sus actividades una materia compleja tiene necesidad del instrumental logístico.

Agregaremos que la lógica simbólica es una disciplina rigurosa, y la más explícita que nos sea dado poseer. Su conocimiento exige el estudio previo de su técnica. A tal fin destina Quine su obra. El

[11] J. Piaget y otros: "Psicología, Lógica y Comunicación", tomo I de los *Etudes d'Epistémologie Génetique*, que próximamente aparecerá en esta colección.

que la hayamos elegido se justifica sobradamente por sus excepcionales cualidades didácticas y por el brillo de la exposición. Secciones importantes, tales como la técnica de reducción lógica y construcción de tablas, todo lo que se refiere a cuantificación, etc., han sido presentadas en un estilo claro y sintético, no demasiado frecuente en los manuales del género; a ello se agrega el aporte de las investigaciones específicas de Quine, que confieren novedad al texto.

El autor, por especial consideración hacia su público, ha omitido temas que podrían ser complementarios —en particular, diversos aspectos de sintaxis lógica— con el objeto de mantener la claridad de exposición; así ganó, al mismo tiempo, una fuerte coherencia.

Jorge J. Goldemberg

Prefacio a la edición castellana

Este libro fue escrito hace catorce años, casi todo él en mi deficiente portugués; luego fue mejorado, en cuanto al idioma, por los amables amigos que se mencionan en el Prefacio a la edición brasileña. Algunas ideas y partes del texto han sido incorporadas a mis libros posteriores *Methods of Logic* y *From a Logical Point of View*. No obstante, la mayor parte del libro ha permanecido hasta hoy únicamente en su modo de existencia originario.

En los años transcurridos desde la edición portuguesa ha habido mucha actividad y muchos progresos en la lógica matemática. Sin embargo, los elementos de esta ciencia no han variado, y creo que los principales aportes al análisis filosófico que ella proporciona son prácticamente los mismos. Por este motivo celebro reeditar el libro y presentarlo al público de habla española, tanto más por cuanto ha sido encargado de traducirlo un pensador tan importante como Mario Bunge. Fuera del lenguaje, esta edición difiere de la original sólo en correcciones de rutina, unas pocas revisiones de detalle, y algunos agregados a la bibliografía.

W. Q.

Institute for Advanced Study, Princeton,
New Jersey, 29 de noviembre de 1956

Prefacio a la edición brasileña

Para justificar un estudio profundo de la parte técnica de la lógica teórica es indispensable comprender la significación filosófica y práctica de la lógica moderna. Pero, recíprocamente, también se necesita algún conocimiento de las técnicas lógicas para advertir las implicaciones filosóficas y prácticas de esa teoría. Este libro constituye una introducción tanto a la parte teórica moderna como a sus consecuencias generales.

La particular sistematización lógica que se emplea en este trabajo es el resultado de un esfuerzo por conciliar tres ideales: el rigor en los detalles teóricos, la conveniencia en las aplicaciones prácticas, y la sencillez de la presentación. Alcanzar este último ideal ha sido el principal de mis objetivos. La sistematización que aquí se presenta es tal, que el lector quedará en condiciones de aplicar las técnicas por sí mismo; quien desee profundizar más en las técnicas lógicas encontrará sugerencias para la lectura de otras obras.

Desde el punto de vista teórico, el patrón de reglas adoptado en este trabajo es adecuado para dar una clara concepción de la naturaleza de la lógica moderna, aún cuando deje algo que desear al especialista. Algunos resultados importantes, cuyo desarrollo detallado se encuentra en la bibliografía, han sido expuestos sin demostración, a fin de concentrar la atención en sus consecuencias filosóficas y evitar que el libro alcance las dimensiones de un tratado avanzado, difícil y largo.

El contenido del libro es, en esencia, el de una serie de conferencias que pronuncié como profesor visitante en la *Escola Livre de*

Sociologia e Política de la Universidad de San Pablo (Brasil), de junio a setiembre de 1942, bajo los auspicios del *Committee for Inter-American Artistic and Intellectual Relations*. La lógica que aquí se expone tiene ciertas semejanzas con la que presento en mi libro *Mathematical Logic*, y con la revisión propuesta en mi artículo "Element and Number". El tratamiento de las consecuencias filosóficas gira en torno a las ideas que expuse en el artículo titulado "Designation and Existence", pero va mucho más allá de éste. El nuevo material de naturaleza esencialmente filosófica, que forma parte de los §§ 34-39 y 42, también aparecerá en inglés en los Estados Unidos, en forma de artículo ("Notes on Existence and Necessity"). El § 1, y algunas partes de los §§ 7, 9, 10 y 18, han sido extractados de mi libro *Elementary Logic* (Ginn & Co., Boston). En la Introducción y en el § 8 se incluyen algunos párrafos tomados de *Mathematical Logic* (W. W. Norton & Co., New York). Agradezco a las editoriales mencionadas la autorización para reproducir esos resúmenes, así como también al director de la *Technology Review* por haberme permitido emplear el material incluído en la última parte de la Introducción. Finalmente, algunas partes de la Introducción constituyen un resumen de una conferencia pública sobre "El resurgimiento de la lógica en los Estados Unidos", pronunciada en San Pablo bajo los auspicios de la *União Cultural Brasil-Estados Unidos*. La conferencia será publicada en la colección de disertaciones de la *União*.

Deseo expresar mi gratitud a Cyro Berlinck, director de la *Escola Livre de Sociologia e Política*, por haber gestionado la ayuda necesaria para la preparación del manuscrito, y a Donald Pierson y Cyro Berlinck por haber tenido la gentileza de encargarse de los detalles de la publicación después de mi partida. Agradezco a la Sra. Dora Ferreira da Silva por su apreciable asistencia en la preparación del manuscrito, y a la Sra. Laura Austregésilo por haber traducido el § 31 y parte de la Introducción. A Décio de Almeida Prado y Breno Silveira les agradezco la ayuda que me han prestado en la corrección del portugués de ciertas páginas. Pero he contraído mi deuda mayor con Vicente Ferreira da Silva, quien trabajó incan-

sablemente en la ímproba tarea de rever conmigo la redacción en portugués de todo el manuscrito y quien, además de eso, se encargó de la revisión de las pruebas de imprenta.

San Pablo, 8 de Setiembre de 1942

El autor

Indice

Presentación de la edición castellana VII
Prefacio a la edición castellana XV
Prefacio a la edición brasileña XVI
Introducción 1

I. Teoría de la composición 13
1. Los enunciados y sus valores 15
2. Conjunción y negación. Tablas 17
3. Paréntesis 19
4. Tablas complejas 21
5. Compuestos derivados de tablas 24
6. 'O' 29
7. 'Si—luego' 32
8. Implicación 35
9. Sobre la traducción en general 37
10. Traducción centrípeta 39
11. Equivalencia composicional 41
12. Implicación composicional 46
13. Verdad composicional 48
14. Reducción ulterior. Observaciones diversas 50

II. Teoría de la cuantificación 54
15. El cuantificador 55
16. Pronombres lógicos 58
17. Matrices y esquemas 61
18. Ejemplo complejo de traducción 63

19. Cuantificación vacía 65
20. Verdad y validez cuantificacionales 67
21. La implicación composicional como instrumento de demostración 70
22. Otras reglas de demostración 72
23. Observaciones generales sobre la técnica de la demostración 76
24. Implicación cuantificacional 78
25. Equivalencia cuantificacional 80
26. Cambios de letras. Conmutación de cuantificadores 82
27. El silogismo 86
28. Inferencias que incluyen nombres 88
29. Deducción sobre la base de premisas 90
30. Teoría monádica de la cuantificación 94
31. El aspecto práctico 96

III. Identidad y existencia 100
32. Identidad 101
33. Principios de identidad 103
34. Figuración no puramente designativa 105
35. Lugares inaccesibles al pronombre 109
36. Sentido. Sinonimia. Necesidad 112
37. Composición intensional de enunciados 115
38. Existencia 119
39. El significado ontológico del principio de aplicación 123
40. Descripción 127
41. El pronombre como único sustantivo 131

IV. Clase, relación y número 134
42. Atributos y clases 135
43. Pertenencia e identidad 138
44. Matrices puras. Estructura y contenido 142
45. Existencia de clases 144

46. Abstracción 147
47. Algebra de las clases 149
48. Relaciones 153
49. Relación recíproca, imagen y producto relativo 157
50. Especies de relaciones 161
51. Teoría virtual de clases y relaciones 166
52. Números naturales 170
53. Construcciones superiores 175
54. Otra crisis 176
Lista de los principios más citados 181
Definiciones 183
Bibliografía 185

Introducción

Durante los últimos noventa años, la lógica evolucionó tanto que puede considerársela como una ciencia nueva. Generalmente se estima que esta evolución comenzó a mediados del siglo pasado con las investigaciones, aún rudimentarias, del matemático George Boole. Pero ya antes, como por ejemplo en los trabajos de Leibniz, habían aparecido anticipaciones de estos nuevos desarrollos. No obstante, la nueva lógica evolucionó en forma continuada tan sólo a partir de Boole, y lo hizo a través de las investigaciones de los alemanes Frege y Schröder, del norteamericano Charles Peirce y del italiano Peano, alcanzando un grado de madurez apreciable en 1911-12 con la publicación de la monumental obra en tres volúmenes *Principia Mathematica*, de los ingleses Whitehead y Russell.

La lógica antigua es, en relación con la nueva lógica, un fragmento precientífico de la misma disciplina. Para decirlo con las palabras de Whitehead: "En el desarrollo moderno de la lógica, la lógica aristotélica tradicional se presenta como una simplificación del problema entero que el asunto comporta. A este respecto existe una analogía con la aritmética de las tribus primitivas comparada con la matemática moderna". [1]

La lógica formal de Aristóteles, constituída sobre todo por la teoría del silogismo, sobrevivió a la Edad Media sin sufrir cambios ni progresos importantes. Aun en la segunda mitad del siglo XVIII, Kant pudo hablar de la lógica formal como de una ciencia que ya

[1] Whitehead, prefacio a mi *System of Logistic*.

se había perfeccionado, que ya había sido completada dos mil años atrás. Mientras tanto, los hombres solían efectuar fructíferos raciocinios deductivos en modo poco relacionado con los raciocinios que estudiaba la lógica existente. De esta manera se realizaron, en particular, los grandes progresos de la matemática. Con todo, los matemáticos, y los hombres en general, razonaban libremente sin reparar en la falta de adecuación teórica de la lógica formal de la época o, por lo menos, sin ocuparse de reformarla o extenderla. Acaso ya se habían acostumbrado a no pensar en la lógica cuando se trataba de raciocinar realmente.

Y ¿por qué no se prosiguió así? La necesidad de reexaminar las técnicas de la deducción se hizo patente principalmente en la propia matemática, como veremos en seguida.

Los matemáticos estaban tan ocupados con sus raciocinios y descubrimientos sobre números, funciones y otros entes matemáticos, que no tenían tiempo de razonar sobre el raciocinio mismo. Pero el progreso de la matemática llegó a un punto tal que los métodos deductivos empezaron a desempeñar un papel, y a requerir un estudio especial. Así ocurrió, principalmente, con la aparición de los infinitos de orden superior.

El alemán Georg Cantor fue quien descubrió, a fines del siglo XIX, que hay varios grados de infinitud. Puede ocurrir que dos clases sean infinitas y que, sin embargo, una de ellas sea mayor que la otra. Fue preciso aceptar los números infinitos además de los usuales, para medir los distintos tamaños de las clases infinitas. Cantor mostró que el conjunto de los números infinitos también es infinito y que lo es en un grado de infinitud superior a la infinidad medida por cualquiera de los números infinitos.

Esta teoría contiene muchos resultados extraños. Por ejemplo, Cantor demuestra que la cantidad de números enteros no es mayor que la cantidad de números pares; y que la cantidad de números enteros y fraccionarios no es mayor que la de los simples números enteros; pero que, en cambio, la cantidad de números reales es mayor que la cantidad de números enteros. El tipo de raciocinio que depende de la "intuición" o del "buen sentido", tan usual en

matemática, falla en este estudio de los infinitos de grado superior. La facultad imaginativa se torna inútil cuando se va más allá de los números finitos y de las clases finitas o, en todo caso, más allá del primer grado de infinitud. Para explorar el océano descubierto por Cantor es preciso proceder por navegación a ciegas, fundándose tan sólo en el uso riguroso de reglas válidas de deducción y aceptando sus consecuencias [2]. En este sentido, después de Cantor, las técnicas de la lógica moderna han demostrado ser un instrumento útil de investigación en manos, por ejemplo, del alemán Löwenheim, del noruego Skolem o del austríaco Gödel.

Pero ¿para qué ocuparnos de esta extraña teoría de los números infinitos? Recordemos a la Liebre de Marzo, de *Alicia en el País de las Maravillas*, quien le explicó a Alicia que, junto a dos amigos, tomaba el té constantemente porque siempre eran las seis, hora que indicaba su reloj en el momento de descomponerse; y que la mesa estaba tendida con varios cubiertos para que pudiesen cambiar de lugar después de cada té. Pero cuando Alicia le preguntó qué hacían al completar la vuelta a la mesa, la Liebre se quejó de que la cosa se estaba poniendo aburrida. El matemático que vuelve sus espaldas a los números infinitos procede igual que la Liebre de Marzo. Tenemos que ocuparnos de esta teoría por amor a la coherencia. Cantor estableció su teoría sobre la base de principios ya aceptados y empleados en el desarrollo de otras partes de la matemática, por medio de métodos deductivos igualmente aceptados y empleados. No podemos, sin incurrir en contradicción, repudiar la teoría de los números infinitos —por extraña que sea— sin sacrificar al mismo tiempo partes familiares y útiles de la matemática, que comparten el mismo fundamento.

Tal vez podamos librarnos de algunas partes de esta teoría sin hacer un sacrificio, y ello podrá hacerse del siguiente modo: acaso podamos formular sutilmente los principios fundamentales de la matemática, así como los métodos de deducción, de manera que sean suficientes para las teorías matemáticas familiares y útiles,

[2] Cf. Whitehead, *On Cardinal Numbers*, p. 367

pero no para las partes más exóticas de la teoría cantoriana. Vemos que, aun para alejarnos de la aritmética infinita, es preciso tornar explícitos los métodos deductivos y estudiarlos intensamente.

Un motivo aún más imperativo para una indagación lógica de esta naturaleza surgió a comienzos de este siglo, con el descubrimiento hecho por el lógico inglés Bertrand Russell, de que los principios del raciocinio que se emplean tácitamente en matemática, y tal vez fuera de ella, son capaces de envolvernos en contradicciones. Este descubrimiento precipitó una crisis. Los principios de la lógica deductiva tuvieron que formularse explícita y cuidadosamente, así como también someterse a una revisión, para que la matemática en general estuviese bien fundada.

Esas contradicciones o paradojas son curiosas y entretenidas. Una contradicción característica es la que implica la noción de *denotación*, en el sentido en que el adjetivo 'humano' denota a todo hombre, el adjetivo 'verde' a toda cosa verde, el adjetivo 'largo' a toda cosa larga, y así sucesivamente. Llamemos *heterólogo* a todo adjetivo que no se denota a sí mismo. Por ejemplo, el adjetivo 'largo' [3] es heterólogo porque no se denota a sí mismo, es decir, no es largo. El adjetivo 'inglés' es heterólogo porque no es inglés sino castellano. El adjetivo 'monosílabo' es heterólogo porque no es monosílabo sino pentasílabo. En cambio, el adjetivo 'corto' no es heterólogo, porque se denota a sí mismo: es corto. El adjetivo 'portugués' no es heterólogo, porque es un adjetivo portugués. El adjetivo 'pentasílabo' no es heterólogo, porque es pentasílabo. La paradoja surge cuando preguntamos si el propio adjetivo 'heterólogo' es heterólogo. Es heterólogo si, y solamente si no se denota a sí mismo, es decir, si, y solamente si *no* es heterólogo.

Esta paradoja, debida al lógico alemán Kurt Grelling, no es una paradoja puramente lógica, porque depende de las nociones no lógicas de adjetivo y denotación. Pero la paradoja debida a Russell, con ser puramente lógica, se le parece mucho. Trata de

[3] Empleo comillas simples, ' ', para formar el nombre de una palabra u otra expresión. La expresión formada por las comillas simples designa la expresión que encierran las comillas.

la *clase* cuyos miembros son exactamente clases que no son miembros de sí mismos. Esta clase es miembro de sí misma si, y solamente si no lo es (cf. § 44).

Estas paradojas y otras más complejas son entretenidas, pero también son causa de problemas muy serios. Sus repercusiones en la matemática continúan hasta la fecha. Y, como ya lo hemos dicho, el descubrimiento de las paradojas hizo imperativo el resurgimiento de la lógica.

Otro motivo de este resurgimiento se halla en el esfuerzo por basar ciertas ideas dudosas de la matemática sobre otras, más claras. El advenimiento de una teoría heterodoxa de los números infinitos provocaría, desde luego, una tentativa de definir la noción de número en general, y la noción de infinito, sobre la base de otras nociones más fundamentales. En la matemática también había, mucho antes de los números infinitos de Cantor, otras nociones que se hacía necesario aclarar por medio de definiciones fundadas en conceptos claros. Una de esas nociones era la de *infinitésimo*, fundamental en el cálculo diferencial desde los tiempos de Newton y Leibniz. Era una noción absurda: la de un número positivo infinitamente pequeño y, sin embargo, mayor que cero. Fue Weierstrass quien, en el siglo pasado, eliminó este absurdo y fundó las nociones del cálculo diferencial sobre una base sólida, llamada teoría de los límites. Otra noción que se debía aclarar era, naturalmente, la de número imaginario (la raíz cuadrada de un número negativo).

El matemático ya ha conquistado el derecho a hablar sin sentido cuando así le plazca, pues, con todo, presta grandes servicios a aquellas ciencias naturales en las que se aplica la matemática. Pero sería interesante, al menos desde el punto de vista filosófico, conferir un sentido a tales nociones y comprender el contenido de la matemática. Esto podría ser de utilidad hasta para el propio matemático.

Un programa de esta especie, que se proponga reducir unas a las otras las nociones matemáticas con vistas a una mayor claridad, no parece depender del desarrollo de una nueva lógica.

Ocurrió, sin embargo, que el análisis matemático siguió dependiendo del uso y de la comprensión cada vez más precisa de las nociones auxiliares del tipo de las que preponderan en los principios de la lógica misma: las nociones de clase, de relación, y las que corresponden a las palabras 'si', 'entonces', 'no', 'y', 'es', 'todo', 'algunos', y varias otras. Lo más sorprendente es que todas las nociones matemáticas resultaron no sólo reducibles a algunas de ellas, sino también, y por completo, a las nociones lógicas auxiliares. Además de esto se descubrió que las últimas son reducibles, a su vez, a tres: una, que corresponde a la palabra 'ni'; otra, a la palabra 'es', y la tercera a la palabra 'todo', con el añadido de un sistema de pronombres. Así, todo enunciado de la matemática se convierte, según estas reducciones, en la mera abreviatura de un enunciado puramente lógico, escrito exclusivamente en términos de las tres nociones mencionadas, sin ningún otro agregado.

No disminuimos la importancia teórica de esta reducción cuando mencionamos que el teorema '2 + 2 = 4', escrito en términos de ese pequeño vocabulario lógico, se desarrollaría hasta alcanzar varios metros de longitud, y que el teorema del binomio se prolongaría de polo a polo. Sin embargo, queda entendido que toda ley matemática es la abreviatura de una ley lógica. La matemática pura es reducible a la lógica.

La nueva lógica ya se ha integrado en el cuerpo de la teoría matemática, no sólo como base teórica, en la forma que ya hemos mencionado, sino también como instrumento práctico de investigación dentro de varias ramas especiales de la matemática. Un ejemplo importante de esto último es la solución parcial del célebre problema matemático denominado problema del continuo, debida al lógico Kurt Gödel, en el año 1940.

¿Qué es esa lógica? ¿De qué trata? En cierto sentido, podemos afirmar que la lógica trata de todo. *No* en el sentido de que la lógica sea una ciencia universal, que abarque toda otra ciencia y

de cuyas leyes puedan deducirse las leyes de cualquiera ciencia especial. La lógica no es, en tal sentido, una ciencia universal; pero sí es una ciencia *general*, en el sentido de que las verdades lógicas se refieren a objetos cualesquiera. Por ejemplo, la verdad lógica que dice que todo objeto es idéntico a sí mismo, se aplica de una vez por todas a todos los objetos estudiados por cualquier ciencia.

Por lo tanto no podemos decir que la lógica *incluye* las demás ciencias, pero sí que está *incluída* en todas las otras ciencias, de manera que forma la parte común a ellas. Lo que afirma la lógica es aquello que se puede afirmar sobre los objetos de cualquier ciencia. La lógica es, como lo sugiriera Tarski, el común denominador de las ciencias especiales.

La caracterización que acabamos de dar del dominio de la lógica deja mucho que desear en cuanto a precisión y explicitez. Además, no ofrece, en verdad, ninguna indicación acerca de los propósitos de la lógica, ni sobre el tipo de leyes y problemas de que se ocupan los lógicos; pues, ciertamente, el ejemplo "todo objeto es idéntico a sí mismo" es demasiado simple y trivial para ser representativo.

Es fácil, sin embargo, fijar una distinción entre las verdades lógicas y otros enunciados verdaderos, si nos referimos nuevamente al "vocabulario lógico" consistente en las palabras fundamentales 'es', 'no', 'y', 'o', 'si', 'ni', 'algún', 'todo', etc., que a su vez se reducen, como ya se mencionó, a unas pocas. Un enunciado es *lógicamente verdadero* si las palabras del vocabulario lógico se hallan dispuestas en el enunciado de manera tal que sea verdadero independientemente de sus demás ingredientes. Tomemos el ejemplo clásico:

(1) Si todo hombre es mortal, y si Sócrates es un hombre, entonces Sócrates es mortal.

Este enunciado es verdadero, y lo es independientemente de los ingredientes 'hombre', 'mortal' y 'Sócrates'; ninguna sustitución de estas palabras puede tornarlo falso. Tan sólo las palabras 'si', 'todo', 'es', 'y', y 'entonces', pertenecientes al vocabulario lógico,

figuran *esencialmente* en el enunciado, es decir, en forma tal que la sustitución de estas palabras por otras expresiones (por ejemplo, 'todo' por 'ningún', 'es' por 'no es' e 'y' por 'o') puede hacer que el enunciado sea falso. En suma, *un enunciado es lógicamente verdadero si sólo las palabras del vocabulario lógico figuran esencialmente en el enunciado.*

Quiero destacar el hecho de que aún no he propuesto filosofía alguna, y ninguna gnoseología relativa a la verdad lógica; en particular, ninguna gnoseología convencionalista, según la cual las verdades lógicas serían establecidas por convenciones arbitrarias que rijan el uso del lenguaje. Una descripción análoga a mi descripción de la verdad lógica también serviría, por ejemplo, para la *verdad química*: verdad química es todo enunciado en que sólo figura esencialmente el vocabulario químico, suponiendo que este vocabulario haya sido estipulado con anterioridad. Pero nadie concluiría que las verdades de la química se establecen meramente por convenciones arbitrarias del lenguaje. En general, el recurso de apelar a una lista de palabras y a la noción semántica de *figurar esencialmente*, para trazar los límites de una ciencia cualquiera, nada implica respecto de *por qué* son verdaderos los enunciados de la ciencia en cuestión. El único método claro que conozco para *delimitar* aquella clase de verdades a la que pertenece como miembro típico el enunciado 'Sócrates es hombre o no es hombre', es el método según el cual decimos que sólo el vocabulario lógico figura esencialmente en aquel enunciado; pero esto no quiere decir que Sócrates es o no es un hombre *porque* se adoptaron ciertas convenciones que regulan el uso de las palabras 'es', 'o' y 'no'. Por el contrario, ya he expresado mi duda de que la tesis del convencionalismo tenga algún significado [4].

Mi delimitación de la verdad lógica depende de la noción de "figurar esencialmente", cuya definición depende explícitamente, a su vez, de la distinción general entre verdad y falsedad. Así, aún cuando aquella delimitación de la verdad lógica sólo parece tratar

[4] En mi ensayo "Truth by Convention".

de los enunciados y de las palabras que figuran en ellos, no depende solamente de los rasgos *gráficos* de los enunciados; porque la verdad en general no es semejante rasgo de un enunciado. En general, no podemos saber si un enunciado es verdadero, ni si una palabra figura en él esencial o accidentalmente, con sólo indagar el enunciado, prescindiendo del mundo objetivo.

Pero si pudiéramos formular un criterio de verdad *lógica* únicamente en los términos de las figuras gráficas de los enunciados, tendríamos una descripción de la verdad lógica que no haría uso de la noción de *figurar esencialmente* ni dependería de la noción general de verdad. El valor práctico del criterio procurado sería el de guiarnos prácticamente en el descubrimiento y reconocimiento de verdades en el dominio de la lógica.

Claro está, no podríamos pretender alcanzar ningún criterio de verdad química, por ejemplo, en términos de signos gráficos. Pero parece que la verdad lógica, en particular, se presta a ser determinada mediante un criterio de tal naturaleza, ya que toda vez que en la práctica reconocemos la verdad lógica, lo hacemos inspeccionando únicamente el enunciado mismo y quizá ciertas expresiones relacionadas con él.

El criterio en cuestión consistiría en una formulación estricta del concepto de demostración lógica, sujeto a las dos condiciones siguientes: (a) toda verdad lógica —ninguna falsedad— tendría una demostración (aun cuando muchas veces la demostración no hubiese sido descubierta); (b) toda demostración, una vez descubierta, podría *legitimarse* mecánicamente, sin ir más allá de las representaciones gráficas de los enunciados. La formulación abarcaría la verdad matemática en general, debido a la reducción de la matemática a la lógica.

Pero el lógico austríaco Kurt Gödel demostró en 1931 que este programa es imposible: que (a) y (b) son incompatibles (cf. § 54). Demostró que no puede existir una sistematización coherente dentro de la cual todo enunciado verdadero de la matemática, o aun de la aritmética elemental, sea demostrable. Dada una sistematización cualquiera de la lógica, habrá verdades lógicas y aun aritméticas

demostrablemente indemostrables. Es éste un resultado paradójico de importancia crucial para la filosofía de la matemática, pues contradice la idea de que la verdad matemática o lógica consiste precisamente en la posibilidad de su demostración.

De la noción de verdad lógica sólo nos queda la definición anterior, en términos de verdad general. No podemos sustituir esta definición por reglas de demostración. Pero la formulación de las reglas de demostración conserva toda su importancia, pues sólo mediante los métodos de demostración, por incompletos que ellos sean, sigue siendo posible revelar verdades lógicas o matemáticas que no son todavía evidentes. En la medida en que las técnicas de la nueva lógica son útiles, su formulación rigurosa es deseable.

Consideremos, por último, el papel de la lógica en las ciencias naturales. "La lógica encuentra su uso práctico en las inferencias cuyas premisas y consecuencias no son verdades lógicas. La lógica permite efectuar tales inferencias cuando el enunciado 'Si — entonces —', que liga la premisa con la consecuencia, es una verdad lógica (como la (1) que se vió más arriba). Lo mismo vale para el uso práctico de la matemática en general; la prodigiosa utilidad de las técnicas matemáticas en las ciencias naturales depende, simplemente, del hecho de que se pueden reconocer verdades matemáticas de la forma 'Si — entonces —', cuyos componentes son enunciados de las ciencias naturales" [5].

La lógica, a diferencia de las partes numéricas de la matemática, tradicionalmente interviene en las ciencias naturales sólo de manera tácita y bastante rudimentaria. Ha desempeñado un papel por lo menos tan secundario como el que desempeñó la aritmética en la época de la numeración romana. Pero el papel de la lógica en las ciencias promete ser muy otro después de la esquematización de la lógica en el espíritu de la matemática moderna.

[5] De mi libro *Mathematical Logic*, p. 7.

Antes, cuando no preponderaba el número, la técnica era generalmente deficiente. Por esto es que el progreso de las ciencias naturales dependió siempre del discernimiento de cantidades mensurables de una especie u otra. La medición, tanto en la física como en cualquier otra ciencia, consiste en establecer una correspondencia entre los objetos de la ciencia en cuestión y la serie de los números. Estas correspondencias son recomendables porque, en cuanto se las establece, se dispone de la avanzada teoría matemática de los números, como instrumento para el razonamiento posterior.

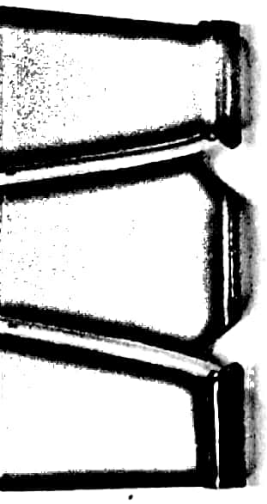
Así y con todo, ninguna ciencia puede reposar por entero sobre la medición, y muchas investigaciones científicas caen fuera de ese método. En los problemas científicos en que la medición no es importante, las técnicas que proveen las partes numéricas de la matemática son inútiles; o nos dirigimos hacia aquellos capítulos de la matemática menos conocidos y desarrollados que tratan de asuntos no numéricos —por ejemplo, las relaciones— o procedemos con ayuda del simple sentido común.

Entre los capítulos no numéricos de la teoría matemática que resultarían útiles para las ciencias naturales, acaso el más conocido sea el de la teoría de los grupos. Cuando consideramos un conjunto de movimientos o de otras operaciones, la teoría de los grupos nos provee de una técnica sistemática para tratar los efectos de la aplicación sucesiva de esas operaciones. Sin embargo, tales técnicas no numéricas acuden muy rara vez en auxilio del hombre de ciencia.

Es en este punto donde resulte acaso más provechosa la nueva lógica matemática al hombre de ciencia. Al científico ansioso por manejar técnicas no cuantitativas, la lógica matemática le ofrece auxilio de dos maneras: le suministra técnicas explícitas para la manipulación de los componentes más sencillos del lenguaje, y una base clara y sistemática sobre la cual pueden construirse futuras teorías apropiadas a las necesidades científicas especiales que surjan de cuando en cuando.

El interés principal de la nueva lógica es, con todo, teórico. Esta ciencia, al abarcar las raíces de la matemática, constituye

el medio para investigar la naturaleza de la matemática en general. Más aún, la significación filosófica de los nuevos desarrollos lógicos no se limita a la filosofía de la matemática; como veremos, toca cuestiones centrales de la filosofía, tales como los problemas de la necesidad y de la posibilidad, y aun cuestiones de índole ontológica, tales como '¿Qué existe?' y '¿Qué es lo real?'.



I. Teoría de la composición

§ 1. *Los enunciados y sus valores*

Es conveniente considerar la lógica, en su forma moderna, como compuesta de dos partes: la teoría de la deducción y la teoría de las clases. Ésta es una distinción fundamental, que tiene una importancia considerable aun para la filosofía, como veremos más adelante (§§ 44, 54).

La teoría de la deducción se divide, a su vez, en dos partes: la teoría de la composición y la teoría de la cuantificación. Luego se hará manifiesta la naturaleza de estas partes.

La teoría de las clases contiene partes susceptibles de un estudio separado, particularmente la teoría de la identidad (Cap. III), el álgebra de las clases (§ 47), o bien la aritmética elemental (§§ 52, 54).

La tricotomía en teoría de la composición, de la cuantificación y de las clases, corresponde a los respectivos elementos del vocabulario lógico mínimo mencionado anteriormente. A la palabra 'ni' le corresponderá la teoría de la composición; a la palabra 'todo' y al sistema auxiliar de pronombres, la teoría de la cuantificación; y a la palabra 'es', la teoría de las clases.

Por el momento dejaremos de lado la teoría de la cuantificación y la teoría de las clases. Como preparación para un estudio técnico de la primera parte de la lógica, que trata de la composición de los enunciados, consideremos lo que es un enunciado*. Los enunciados son *frases*, pero no toda frase es un enunciado. Los enunciados comprenden sólo aquellas frases que son verdaderas y aquellas

* Otras denominaciones usuales son: *proposición y sentencia*. La teoría de los enunciados suele denominarse *lógica de las proposiciones*. (N. del T.)

que son falsas. Estas dos propiedades de los enunciados, la verdad y la falsedad, se llaman *valores* de los enunciados. Así, decimos que el valor de un enunciado es la verdad o la falsedad, según que el enunciado sea verdadero o falso.

Las oraciones '¿Qué hora es?', 'Cierre la puerta', 'Que yo sea todavía joven', etc., no son enunciados por no ser verdaderas ni falsas. Sólo las frases *declarativas* son enunciados. Más aún, no todas las oraciones declarativas son enunciados. La oración declarativa 'Estoy enfermo' no es, en sí misma, ni verdadera ni falsa, pues puede ser afirmada verídicamente por una persona y falsamente por otra. Análogamente, 'Él está enfermo' no es, en sí misma, ni verdadera ni falsa, porque el referente de la palabra 'él' cambia con el contexto. La oración 'Juan está enfermo' tampoco es por sí misma ni verdadera ni falsa, porque el designado del nombre 'Juan' depende del contexto, toda vez que muchas personas llevan este nombre. Lo mismo ocurre con las frases que hacen uso esencial de palabras tales como 'aquí' y 'allí', ya que tales oraciones pueden ser simultáneamente verdaderas en una boca y falsas en otra.

Todas las frases declarativas, del tipo de las que acabamos de considerar, deben ser completadas de manera tal que el valor no dependa del contexto ni de quien las pronuncie, antes de que podamos considerarlas como enunciados que posean un valor propio.

Además de esto, el análisis lógico se facilita cuando también exigimos que el valor de un enunciado permanezca independiente del *tiempo*. Esto ocurre cuando privamos a los verbos de toda inflexión temporal, empleando descripciones cronológicas explícitas cuando queremos hacer distinciones de tiempo. Por ejemplo, la frase 'Brasil se tornará independiente', afirmada como verdadera el 1.º de enero de 1820, corresponde al enunciado 'Brasil se torna independiente después del 1.º de enero de 1820'. Este enunciado es verdadero en sí mismo, independientemente de la fecha en que se lo afirma, si se entiende que la expresión 'se torna' se toma aquí sin determinación temporal.

Aun cuando los refinamientos de esta naturaleza sean impor-

tantes en la base teórica, en la construcción de ejemplos convendrá seguir empleando, como enunciados, frases tales como 'Brasil se tornará independiente', o aun 'Estoy enfermo'. Pero siempre tenemos que imaginar que cada frase esté completada hasta formar un enunciado genuino. Las técnicas formales del análisis dependerán de la suposición de que un enunciado es una oración verdadera o falsa independientemente del contexto, de quien habla, y del lugar y del tiempo de la afirmación.

§ 2. *Conjunción y negación. Tablas*

La teoría de la composición trata de los modos de *componer* enunciados para formar enunciados *compuestos*. Uno de los modos de composición, llamado *conjunción* por los lógicos, consiste en vincular dos enunciados con la palabra 'y', o bien, en la notación de la lógica matemática, con el punto '.'. Por ejemplo,

Juan está enfermo . José está afuera.

Un enunciado *conjuntivo*, formado de esta manera, es verdadero si ambos enunciados componentes son verdaderos; en todos los demás casos es falso. Para saber el *valor* de una conjunción, basta conocer los valores de los componentes.

1er. componente	2º componente	conjunción
V	*V*	*V*
F	*V*	*F*
V	*F*	*F*
F	*F*	*F*

La conjunción combina dos o más enunciados por vez; en cambio la *negación*, que abordaremos ahora, es un método mediante el cual se elabora solamente un enunciado para formar otro. Su tabla de valores es ésta:

componente	negación
V	*F*
F	*V*

En lógica matemática, la negación de un enunciado se designa anteponiéndole un tilde; por ejemplo, '$\sim$ Juan está enfermo' significa que Juan no está enfermo.

Cuando la conjunción y la negación se aplican sucesivamente para formar un enunciado complejo, por ejemplo

(1) $\sim$ (Juan está enfermo . José está afuera),

siempre podremos calcular el resultado usando los cuadros dados anteriormente. Podemos determinar sistemáticamente qué valores de los componentes simples tornarían verdadero el enunciado compuesto, y qué valores de los componentes simples lo tornarían falso. Esto se hace de la siguiente manera (empleando 'p' y 'q' como abreviaturas de 'Juan está enfermo' y 'José está afuera', respectivamente):

p	q	$p \cdot q$	$\sim (p \cdot q)$
V	V	V	F
F	V	F	V
V	F	F	V
F	F	F	V

Debajo de los componentes simples escribimos columnas que agotan las combinaciones de valores. Debajo de la conjunción indicamos su valor en los cuatro casos; finalmente, hacemos otro tanto debajo de la negación de la conjunción. Esta última columna se forma a partir de la penúltima empleando la tabla de la negación. La tabla del ejemplo (1) será la siguiente:

p	q	$\sim (p \cdot q)$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	V

En esta tabla hemos dejado de lado la columna relativa a '$p \cdot q$', que sólo ha sido un medio para deducir la última columna. El cuadro

basta para aclarar el enunciado compuesto sobre la base de la comprensión previa de los componentes simples. El compuesto tiene el mero efecto de rechazar la verdad conjunta de los dos componentes 'Juan está enfermo' y 'José está afuera'.

Tal deducción de tablas puede llevarse a cabo, claro está, para combinaciones cada vez más complejas de conjunciones y negaciones, sin límite alguno, aun cuando el ejemplo que hemos usado sea muy simple. Otro ejemplo igualmente simple es el siguiente:

(2) (~ Juan está enfermo) . José está afuera

p	q	$\sim p$	$(\sim p) \cdot q$
V	V	F	F
F	V	V	V
V	F	F	F
F	F	V	F

Aquí, como anteriormente, la columna intermedia no forma parte de la tabla final [1].

§ 3. *Paréntesis*

Aun cuando la proposición (1) que hemos escrito más arriba sea verdadera en todos los casos excepto cuando 'Juan está enfermo' y 'José está afuera' son ambos verdaderos, el enunciado (2) es verdadero solamente en el caso en que 'Juan está enfermo' sea falso y 'José está afuera' verdadero. Este es un ejemplo de la importancia de los paréntesis, en cuyo uso radica la única diferencia visible entre (1) y (2). El (1) corresponde a las palabras:

No es que Juan está enfermo y José está afuera;

[1] El uso explícito de las tablas de valores se encuentra en la literatura tan sólo a partir de 1920-21 (Lukasiewicz, Post, Wittgenstein). Pero ciertas técnicas equivalentes en esencia a las de las tablas fueron expuestas por Peirce en 1885 (vol. 3, §§ 387-388); de hecho estaban contenidas implícitamente en la "regla general de desarrollo", de Boole (1854, pp. 75-76).

en cambio, (2) corresponde a las palabras:

Juan no está enfermo pero José está afuera.

Para evitar el exceso de paréntesis, convengamos en interpretar la forma equívoca

$\sim$ Juan está enfermo . José está afuera

en la forma (2) y no en la (1). De esta manera, puede considerarse que el tilde rige siempre el enunciado más breve compatiblemente con la colocación de paréntesis.

Dentro de conjunciones repetidas nunca se necesitan paréntesis. No es preciso distinguir entre las conjunciones '$(p \,.\, q) \,.\, r$' y '$p \,.\, (q \,.\, r)$'. Cada una de ellas puede escribirse indistintamente en la forma '$p \,.\, q \,.\, r$'. Esto puede verse construyendo un cuadro comparativo como el de la Tabla 1. Aquí, como antes, empezamos por agotar los modos de dar valores a los componentes simples. Pero ahora tenemos que considerar tres componentes simples en lugar de dos, y por esto hay 8 combinaciones de valores en lugar de 4. Obtenidas las 8 combinaciones, seguimos calculando cada una de las columnas siguientes sobre la base de las columnas anteriores

p	q	r	$p \,.\, q$	$(p \,.\, q) \,.\, r$	$q \,.\, r$	$p \,.\, (q \,.\, r)$
V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Tabla 1

y según la tabla de la conjunción. El resultado muestra que '$(p \,.\, q) \,.\, r$' y '$p \,.\, (q \,.\, r)$' son equivalentes, siendo ambos verdaderos solamente en el caso en que los tres componentes simples

lo sean. Está claro que la situación es semejante para las conjunciones que constan de cuatro, cinco, o más componentes; toda conjunción iterada puede expresarse sin paréntesis del modo '$p \,.\, q \,.\, r \,.\, s \,.\, \ldots$', y puede considerarse simplemente como la conjunción simultánea de todos los componentes simples. La conjunción es verdadera sólo en el único caso en que todos los componentes simples sean verdaderos.

§ 4. *Tablas complejas*

Como se ve, el método de las tablas nos permite calcular paso a paso el sentido lógico de cualquier complejo de conjunciones y negaciones, independientemente de su grado de complejidad. La Tabla 2 reproduce los resultados para el compuesto

(1) $$\sim(\sim(p \,.\, \sim q \,.\, r) \,.\, \sim(p \,.\, \sim r) \,.\, q) \,.$$

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$p.\sim q.r$	$\sim(p.\sim q.r)$	$p.\sim r$	$\sim(p.\sim r)$	*Conjunción total*	*Negación total*
V	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F
V	F	V	V	F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	F	V	F	V	F	V
V	V	F	F	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V	F	V

Tabla 2

Obsérvese que la construcción de la tabla se facilita cuando cada conjunción iterada se trata como conjunción simultánea, y se la juzga verdadera solamente en el caso en que sean verdaderos todos sus componentes.

La tabla resultante incluye, en rigor, sólo las primeras tres columnas y la última columna de la Tabla 2; las siete columnas intermedias fueron, simplemente, instrumentos de deducción. La tabla final muestra que el enunciado (1) es verdadero en todos los casos excepto: (a) en el caso en que los tres componentes simples son verdaderos; (b) en el caso en que el primer componente simple es falso y los otros dos son verdaderos; y (c) en el caso en que el segundo componente simple es verdadero y los otros dos son falsos.

Tal es la sencillísima técnica de formar la tabla de valores de cualquier enunciado construído por medio de conjunciones y negaciones. Cuando haya más de tres componentes simples, el cuadro tendrá más de 8 líneas; en general, tendrá 2^n líneas si consta de n componentes simples. Un método conveniente para agotar las com-

	p	q	r	$s \ldots$
	V	V	V	$V \ldots$
	F	V	V	$V \ldots$
1				
	V	F	V	$V \ldots$
	F	F	V	$V \ldots$
2				
	V	V	F	$V \ldots$
	F	V	F	$V \ldots$
	V	F	F	$V \ldots$
	F	F	F	$V \ldots$
3				
	V	V	V	$F \ldots$
	.	.	.	.
	.	.	.	.
	.	.	.	.

Tabla 3

binaciones de valores de los componentes es el que ya hemos ilustrado en los casos en que se presentan uno, dos o tres componentes. El método general se exhibe en la Tabla 3.

La mitad superior de la tabla para dos componentes, 'p' y 'q', se forma agregando al cuadro para un componente una segunda columna que contiene 'V' en ambas casillas. La mitad inferior de la tabla para dos componentes se forma del mismo modo, usando 'F' en lugar de 'V'. Igualmente, el cuadro para tres componentes 'p', 'q' y 'r', se forma, en cuanto a la mitad superior, a partir del cuadro para dos componentes, al cual se agrega una tercera columna que contiene 'V' en todos los lugares; y correspondientemente en lo que respecta a la mitad inferior. La tabla para cuatro componentes se forma a partir del cuadro para tres según la misma regla; y así sucesivamente. En general, se ve que 'V' y 'F' se alternan en forma *simple* en la primera columna, *apareados* en la segunda, en grupos de *cuatro* en la tercera columna, en grupos de *ocho* en la cuarta, y así sucesivamente.

La construcción de las tablas intermedias, como la que interviene en la Tabla 2, es un esfuerzo que en la práctica puede economizarse recurriendo a métodos más rápidos. Un método de esta naturaleza, aplicado al ejemplo considerado en la tabla 2, es el siguiente: Para obtener la mitad superior de la columna final observemos que 'r' debe ser verdadero, y por esto imaginemos que 'r' se sustituya por 'V' dentro de (1); de este modo quedaría

$$\sim (\sim (p \,.\, \sim q \,.\, V) \,.\, \sim (p \,.\, \sim V) \,.\, q).$$

Observemos que '$\sim V$' es 'F', y que 'V', como componente de una conjunción, no tiene ningún efecto, por lo cual puede ser omitido; así queda

$$\sim (\sim (p \,.\, \sim q) \,.\, \sim (p \,.\, F) \,.\, q).$$

Teniendo en cuenta que toda conjunción en que aparece 'F' como componente se torna 'F', y que '$\sim F$' puede ser sustituído por 'V', obtenemos

$$\sim (\sim (p \,.\, \sim q) \,.\, V \,.\, q),$$

de donde

(2) $$\sim (\sim (p \,.\, \sim q) \,.\, q).$$

La mitad superior de nuestra columna final será, pues, meramente la columna correspondiente al enunciado (2). Para determinar los dos primeros lugares de esta columna sustituimos en (2) 'q' por 'V' y reducimos el resultado por medio de operaciones semejantes a las que ya hemos ilustrado. El resultado es, simplemente, 'F'. Para determinar los dos lugares siguientes de la columna, sustituimos 'q' por 'F' en (2) y reducimos el resultado, obteniendo 'V'. Y para determinar la mitad inferior de nuestra columna final, sustituimos 'r' por 'F' en (1) y reducimos el resultado, obteniendo '$\sim (\sim p \,.\, q)$'. Los dos primeros lugares de esta mitad inferior se obtienen sustituyendo 'q' por 'V' en '$\sim (\sim p \,.\, q)$'; el resultado se reduce al mismo 'p', y así se obtiene 'V' en el primer puesto y 'F' en el segundo. Los dos últimos lugares se obtienen mediante la sustitución de 'q' por 'F' en '$\sim (\sim p \,.\, q)$'; el resultado se reduce a 'V'. Después de alguna práctica, este método se aplica con rapidez y exige poco uso del lápiz; además, de cuando en cuando surgen otros medios de aceleración del cálculo. Pero se trata de refinamientos. El método anterior, en que se usan columnas intermedias, puede ser considerado como la técnica fundamental, debido a su carácter esquemático y lúcido.

§ 5. *Compuestos derivados de tablas*

Ahora que poseemos una técnica general para formar el cuadro de valores perteneciente a cualquier enunciado compuesto construído por medio de conjunciones y negaciones, ¿qué podemos afirmar respecto del proceso inverso? ¿Existirá también una técnica tal que, dada cualquier tabla de valores, podamos construir un compuesto de conjunción y negación correspondiente al cuadro dado? ¿O tal vez la conjunción y la negación basten para producir enunciados compuestos que corresponden solamente a algunas de las tablas posibles y no a todas?

La respuesta a esta pregunta es, tal vez, el principio más importante de la teoría de la composición: existe, en efecto, *una técnica tal que, dada una tabla de valores cualquiera, podemos construir*

un compuesto de conjunción y negación que corresponde a dicha tabla [2].

La importancia de este hecho se hará manifiesta más adelante; por el momento veamos en qué consiste esta técnica.

Consideremos cualquier cuadro de valores; tendrá la forma general que se ve en la Tabla 4. Consideremos también las 2^n conjunciones correspondientes que se forman al escribir la conjunción '$p_1 \,.\, p_2 \,.\, p_3 \,.\, \ldots p_n$' y al introducir el tilde donde aparece 'F' en la línea correspondiente de la Tabla 4.

	p_1	p_2	p_3	...	p_n	Compuesto
1er caso	V	V	V	...	V	?
2.° caso	F	V	V	...	V	?
3er caso	V	F	V	...	V	?
4.° caso	F	F	V	...	V	?
5.° caso	V	V	F	...	V	?
6.° caso	F	V	F	...	V	?
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
$(2^n - 1)$°	V	F	F	...	F	?
(2^n)°	F	F	F	...	F	?

Tabla 4

Así obtenemos el siguiente cuadro:

1.ª conjunción:	$p_1 \,.$	$p_2 \,.$	$p_3 \,.$	...	$.\,p_n$,	que	abreviamos	C_1
2.ª "	$\sim p_1 \,.$	$p_2 \,.$	$p_3 \,.$	...	$.\,p_n$	"	"	C_2
3.ª "	$p_1 \,.$	$\sim p_2 \,.$	$p_3 \,.$	...	$.\,p_n$	"	"	C_3
4.ª "	$\sim p_1 \,.$	$\sim p_2 \,.$	$p_3 \,.$	...	$.\,p_n$	"	"	C_4
5.ª "	$p_1 \,.$	$p_2 \,.$	$\sim p_3 \,.$	...	$.\,p_n$	"	"	C_5
6.ª "	$\sim p_1 \,.$	$p_2 \,.$	$\sim p_3 \,.$	...	$.\,p_n$	"	"	C_6
...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$(2^n\text{-}1)$ª "	$p_1 \,.$	$\sim p_2 \,.$	$\sim p_3 \,.$	...	$\sim p_n$	"	"	C_{2^n-1}
(2^n)ª "	$\sim p_1 \,.$	$\sim p_2 \,.$	$\sim p_3 \,.$	...	$\sim p_n$	"	"	C_{2^n}

[2] El primero en demostrar esta verdad fue Post. La demostración que se da en el texto es una adaptación y una simplificación de la suya.

Está claro que la primera conjunción es verdadera tan sólo si 'p_1', 'p_2', 'p_3', ... 'p_n' son verdaderos, esto es, sólo en el primer caso; la segunda conjunción sólo es verdadera en el segundo caso, y así sucesivamente.

Por consiguiente, la negación de la primera conjunción, o sea, '$\sim (p_1 \,.\, p_2 \,.\, \ldots . p_n)$', o más brevemente '$\sim C_1$', es verdadera en todos los casos *excepto* en el primero; y en general '$\sim C$ ' es verdadero en todos los casos excepto en el i-ésimo.

Como '$\sim C_1 \,.\, \sim C_2$' es verdadero solamente cuando son verdaderos '$\sim C_1$' y '$\sim C_2$', resulta verdadero en todos los casos con excepción de los dos primeros. En general, '$\sim C_i \,.\, \sim C_j \,.\, \sim C_k \,.\, \ldots$' es verdadero en todos los casos excepto en el i-ésimo, el j-ésimo, el k-ésimo, ...

Pero con esto ya tenemos la solución de nuestro problema: ya estamos en posesión de una técnica para construir un compuesto de conjunción y negación, correspondiente a una tabla de valores cualquiera. Ya que queremos que el compuesto sea verdadero en todos los casos excepto en los casos señalados con '*F*' en la tabla, el compuesto buscado es simplemente '$\sim C_i \,.\, \sim C_j \,.\, \sim C_k \,.\, \ldots$', donde *i*, *j*, *k*, etc., designan los casos que, en la tabla dada, tienen el valor '*F*'. Cada uno de los enunciados compuestos 'C_i', 'C_j', 'C_k', etc., está construído a su vez a partir de 'p_1', 'p_2', ... 'p_n' por conjunción y negación.

Resumamos la técnica. Supongamos dada una tabla de valores cualquiera. *En la tabla que exhibe las diversas combinaciones de valores de 'p_1', 'p_2', ... 'p_n', se desechan las combinaciones que dan un compuesto verdadero. En correspondencia con cada una de las líneas que quedan en la tabla, se escribe la conjunción '$p_1 \,.\, p_2 \,.\, \ldots\, p_n$', insertando el tilde en cada posición en que figura 'F' en la línea. Finalmente se niega cada una de estas conjunciones resultantes y se forma la conjunción de estas negaciones* (si hubiere más de una).

Por ejemplo, consideremos otra vez la Tabla 2, que construimos anteriormente (§ 4), pero ahora imaginemos que ese cuadro ha sido dado, y que el problema consiste en reconstruir un enunciado compuesto adaptado al cuadro. Vale decir, consideremos el pro-

blema *inverso* del problema cuya solución había engendrado aquella tabla. En esa tabla las combinaciones indicadas con '*F*' son

p	q	r
V	V	V
F	V	V
F	V	F

Las conjunciones correspondientes son '$p \,.\, q \,.\, r$', '$\sim p \,.\, q \,.\, r$' y '$\sim p \,.\, q \,.\, \sim r$'. Negando y ligando los resultados, obtenemos

$$\sim (p \,.\, q \,.\, r) \,.\, \sim (\sim p \,.\, q \,.\, r) \,.\, \sim (\sim p \,.\, q \,.\, \sim r).$$

(Obsérvese que este resultado se escribiría '$\sim C_1 \,.\, \sim C_2 \,.\, \sim C_6$' empleando la notación del argumento general).

El resultado que se obtiene de esta manera difiere del enunciado compuesto originario, cuya tabla habíamos deducido antes. Pero esto no es sorprendente: muchos compuestos corresponden a una misma tabla de valores, así como muchas expresiones aritméticas designan un mismo número (por ejemplo, '3 + 5', '4 + 4', '6 + 2'). Hay, en verdad, además de los dos compuestos de este ejemplo, un tercero, más simple y que tiene la misma tabla de valores: es '$\sim (\sim p \,.\, q) \,.\, \sim (q \,.\, r)$', como puede verificarse formando la tabla de este compuesto de la manera habitual.

La técnica a que acabamos de llegar para construir un compuesto correspondiente a cualquier cuadro se extiende a todos los casos, con excepción del caso extremo en que no figura ninguna '*F*' en la columna del compuesto. La técnica expuesta no abarca este caso, pues la primera cláusula de la formulación de la técnica general exige que sólo consideremos las líneas indicadas con '*F*', las que no existen en este caso. No obstante, dado un cuadro de este tipo, podemos escribir con toda facilidad un compuesto adaptado a él. Un compuesto de esta naturaleza es '$\sim (p \,.\, \sim p)$' o, si que-

remos utilizar explícitamente los componentes 'p_1', 'p_2', ... 'p_n', se tiene '$\sim (p_1 . \sim p_1 . p_2 . p_3 . \ldots p_n)$,' como se ve en la Tabla 5.

p_1	p_2	p_3	...	p_n	$\sim p_1$	$p_1 . \sim p_1 . p_2 p_3 \ldots p_n$	$\sim (p_1 . \sim p_1 . p_2 . \ldots p_n)$
V	V	V	...	V	F	F	V
F	V	V	...	V	V	F	V
V	F	V	...	V	F	F	V
F	F	V	...	V	V	F	V
V	V	F	...	V	F	F	V
...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
V	F	F	...	F	F	F	V
F	F	F	...	F	V	F	V

Tabla 5

La columna que figura debajo de '$p_1 . \sim p_1 . p_2 . p_3 . \ldots . p_n$' contiene '*F*' en todos sus lugares, pues cualquier línea del cuadro contiene un '*F*' debajo de 'p_1' o debajo de '$\sim p_1$'. Por consiguiente, la columna debajo de la negación final contiene '*V*' en todas sus casillas.

El enunciado compuesto que se deriva de cualquier cuadro de valores según la técnica expuesta posee una forma bastante simple y fácil de comprender: es simple porque no tiene paréntesis dentro de paréntesis, y fácil de comprender porque registra en forma visualmente clara las combinaciones de los valores de los componentes que harían falso el enunciado compuesto. Cualquier enunciado puede convertirse, mecánicamente, a esta forma más ventajosa, que denominaremos *forma canónica*. El proceso consiste en deducir el cuadro de valores del enunciado dado, deduciendo posteriormente el enunciado canónico de ese cuadro. Ya sabemos que la forma canónica obtenida de esta manera no es en general la forma más simple posible; pero cualquier técnica general para reducir enunciados a formas de complejidad mínima sería, a su vez

una técnica bastante complicada, y por lo tanto un refinamiento exagerado, del que se puede prescindir.

Existiendo una técnica general para la construcción de enunciados compuestos por conjunción y negación, correspondientes a tablas de valores cualesquiera, se sigue el hecho muy importante de que la teoría de 'y' y 'no' abarca al mismo tiempo todos los otros modos de composición del tipo llamado *extensional*, esto es, de naturaleza tal que el valor del enunciado compuesto dependa únicamente de los valores de sus componentes. Entre los nexos restantes de este tipo se encuentra 'o'.

§ 6 . 'O'

'O' tiene dos sentidos. En el sentido llamado *incluyente*, por lo menos uno de los dos componentes debe ser verdadero para que el compuesto sea verdadero. En el otro sentido, llamado *excluyente*, sólo uno de los componentes debe ser verdadero. Los dos sentidos pueden representarse en una tabla de la siguiente manera:

p	q	p o q (incl.)	p o q (excl.)
V	V	V	F
F	V	V	V
V	F	V	V
F	F	F	F

En cada uno de los dos sentidos, 'p o q' puede traducirse en términos de conjunción y negación; pues aquí tenemos tablas que revelan ambos sentidos de 'o' así como, por otra parte, poseemos una técnica de construcción de compuestos por conjunción y negación correspondientes a tablas cualesquiera. Aplicada al cuadro de 'p o q' en el sentido excluyente, la técnica nos da preliminarmente las conjunciones '$p \,.\, q$' y '$\sim p \,.\, \sim q$'; en seguida, sus negaciones '$\sim (p \,.\, q)$' y '$\sim (\sim p \,.\, \sim q)$' y, finalmente, las conjunciones de éstas, vale decir, '$\sim (p \,.\, q) \,.\, \sim (\sim p \,.\, \sim q)$'. Así conseguimos

mecánicamente la traducción del 'o' excluyente en términos de conjunción y negación. La traducción del 'o' incluyente es todavía más simple. Aplicada a la tabla de 'p o q' en sentido incluyente, la técnica general nos da preliminarmente la conjunción única '$\sim p \,.\, \sim q$' y luego, como resultado final, su negación '$\sim (\sim p \,.\, \sim q)$'.

El sentido incluyente de 'p o q' puede expresarse unívocamente de la manera 'p o q o ambos'; y el sentido excluyente puede expresarse unívocamente de la manera 'p o q pero no ambos'. Cuando nos encontramos con 'p o q' simplemente, no sabemos, en general, en qué sentido entenderlo. Muchas veces la elección es indiferente, y ambos sentidos sirven igualmente bien. Por ejemplo, consideremos la expresión '$x \leqq y$' en palabras, o sea, '$x < y$ o $x = y$'. La palabra 'o' ¿tiene, en este caso, sentido incluyente o excluyente? ¡No importa! La única diferencia entre ambos sentidos se halla, como se ve en las tablas, en el primero de los cuatro casos, esto es, en el caso de la verdad conjunta (cuando ambos componentes son verdaderos); pero cuando se trata de los componentes '$x < y$' y '$x = y$', este caso de verdad conjunta no se presenta, ni en la realidad ni en la mente de quien habla.

Quisiera subrayar este punto porque es un error común creer que ejemplos tales como '$x < y$ o $x = y$' son casos claros del uso excluyente del 'o' en el lenguaje diario. Las cláusulas '$x < y$' y '$x = y$' son de por sí recíprocamente excluyentes o incompatibles; pero este hecho, lejos de establecer que el contexto '$x < y$ o $x = y$' emplee 'o' en el sentido exclusivo, nos *roba* el único caso en que podríamos distinguir entre los sentidos excluyente e incluyente. Los únicos casos que se consideran en la práctica son los tres restantes:

$x < y$	$x = y$
F	V
V	F
F	F

Pero respecto de estos casos los sentidos excluyente e incluyente de 'o' se comportan de manera idéntica.

Esto es igualmente evidente cuando traducimos ambos sentidos de '$x < y$ o $x = y$' en términos de conjunción y negación. El sentido incluyente es

$$\sim (\sim x < y \,.\, \sim x = y)$$

y el sentido excluyente

$$\sim (x < y \,.\, x = y) \,.\, \sim (\sim x < y \,.\, \sim x = y).$$

¿Cómo decidir el sentido que se le quiere dar a la frase? La única diferencia reside en la cláusula '$\sim (x < y \,.\, x = y)$', que se agrega al enunciado de sentido incluyente para producir el de sentido excluyente. Pero esta cláusula adicional es una verdad conocida (para x e y cualesquiera), que por consiguiente podemos incluir u omitir libremente. Omitirla no es negarla; nunca decimos cuánto sabemos.

En resumen, visto que las cláusulas '$x < y$' y '$x = y$' ya son de naturaleza tal que se excluyen recíprocamente, es indiferente que entendamos 'o' en el sentido de que repite esa exclusión, o no.

Si se trata de dar ejemplos indiscutibles del uso excluyente de 'o', es preciso imaginar circunstancias en que la persona que lo emplea tenga visiblemente el propósito positivo de contradecir la verdad conjunta de los componentes, y de hacerlo explícitamente, dentro de aquel mismo enunciado. Tales ejemplos son raros, pero existen. Un ejemplo dado por Tarski es el de un niño que le pide a su padre que lo lleve a la playa y después al cinematógrafo. El padre responde en tono denegatorio: "Vamos a la playa *o* al cinematógrafo". En este caso, el uso excluyente es claro; el padre no sólo desea prometer sino también, al mismo tiempo, rehusar.

Pero es mucho más fácil encontrar casos en que se impone la interpretación incluyente. Por ejemplo, cuando se decreta que la entrega de pasaportes se restringe a las personas nacidas en el país o casadas con nativos del país, no se rehusa con ello pasaporte a las personas nacidas en el país y casadas con nativos del mismo.

La mayor parte del uso del 'o' en el lenguaje diario es de este tipo, que admite tan sólo la interpretación incluyente, o del tipo

de '$x < y$ o $x = y$', que cabe en ambas interpretaciones. Por lo tanto será de utilidad que convengamos entender 'o' *siempre* en sentido incluyente. Los pocos casos contrarios, como 'Vamos a la playa o al cinematógrafo', dicho en tono denegatorio, podemos imaginarlos como completados explícitamente con el agregado de las palabras 'pero no ambos'.

Muchas veces, en la lógica matemática se introduce un signo especial en lugar de 'o' en el sentido incluyente. Pero veo poca ventaja en semejante multiplicación de signos; no estamos interesados en una cábala mística ni en una taquigrafía. Lo que tiene importancia teórica y práctica es la reducibilidad de 'o' y de otros nexos extensionales a la conjunción y a la negación, así como las técnicas —que en parte ya hemos tratado— que gobiernan su manipulación.

§ 7. *'Si — luego'*

Además de 'no', 'y' y 'o', otro nexo que desempeña un papel importante en el lenguaje general es 'si p luego q'. Este compuesto se llama *condicional*, y sus componentes se denominan, respectivamente, *antecedente* y *consecuente*. Puesto que en el condicional se afirma el consecuente tan sólo en modo condicional, la falsedad del consecuente falsifica el condicional íntegro solamente en caso de que el antecedente sea verdadero. Por lo tanto, el único caso en que un condicional es falso, es aquel en que el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Llegamos así a la tabla siguiente:

p	q	si p luego q
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Sabemos construir un compuesto de conjunción y negación co-

rrespondiente a este cuadro: para ello formamos la conjunción '$p \,.\, \sim q$' y negamos, obteniendo '$\sim (p \,.\, \sim q)$'. Tal es el *condicional extensional*. Todo condicional extensional con consecuente verdadero es verdadero, y todo condicional con antecedente falso es verdadero. Así resulta, por ejemplo, que los condicionales

Si el plomo es fusible, luego el mar es salado,
Si el plomo flota en el agua, luego el mar es salado,
Si el plomo flota en el agua, luego el mar es dulce,

son todos verdaderos. Este hecho puede inducirnos a pensar que el condicional extensional esté en conflicto con el sentido común del condicional. Pudiera estimarse que el condicional ordinario supone cierto nexo, acaso causal, entre las condiciones descriptas por el antecedente y las descriptas por el consecuente, de manera que los tres ejemplos que acabamos de considerar serían falsos. No creo que esto sea cierto. Lo que me parece es que no nos alejaríamos menos del uso común por declarar falsos los tres ejemplos que declarándolos verdaderos. Son los ejemplos mismos, y no su verdad, los ajenos al uso común. En la práctica no se forman condicionales cuyos antecedentes tengan valores ya conocidos. Pero eso no impide nuestra identificación de 'si p luego q' con '$\sim (p \,.\, \sim q)$', porque también es evidente que en la práctica no usaríamos un compuesto de la forma '$\sim (p \,.\, \sim q)$' sabiendo cuáles son los valores de los componentes. La razón es obvia: en lugar de afirmar '$\sim (p \,.\, \sim q)$', o 'si p luego q', podríamos dar más información en menos espacio con sólo afirmar 'q' o negar 'p'. El nexo causal figura en la razón que se tenga para afirmar un enunciado de la forma '$\sim (p \,.\, \sim q)$', pero no en el contenido del enunciado; lo mismo ocurre con la forma verbal 'si p luego q'. Por este motivo, creo que '$\sim (p \,.\, \sim q)$' provee una buena traducción de las palabras 'si p luego q', y que la tabla en consideración está bien adaptada al condicional.

Ahora será necesario considerar otros usos de 'si — luego', que exigen un análisis diferente. Este nexo también se usa para expresar leyes generales, tales como

Si una cosa me interesa, luego le aburre a Jorge.

La conexión íntima entre el interesarme a mí y el aburrirle a Jorge forma parte del contenido de este enunciado, además de figurar simplemente en su motivación. Pero nótese que, este ejemplo, que ilustra lo que podemos llamar *condicional general*, de hecho no está compuesto de dos enunciados componentes: no es un condicional en este sentido. Su naturaleza se advierte más claramente en esta otra formulación:

Cualquiera que sea la cosa escogida, si me interesa, luego le aburre a Jorge.

Este enunciado tiene el efecto de afirmar un conjunto ilimitado de condicionales de la forma

Si — me interesa, luego — le aburre a Jorge

Cada uno de estos condicionales singulares, por ejemplo

Si el basket-ball me interesa, luego el basket-ball le aburre a Jorge,

puede entenderse en el sentido propuesto antes, o sea,

$\sim$ (el basket-ball me interesa . $\sim$ el basket-ball le aburre a Jorge).

La conexión entre el interesarme a mí y el aburrirlo a Jorge se expresa en nuestro condicional no sólo por el nexo 'si — luego', sino también por estar precedido del prefijo 'cualquiera sea la cosa escogida'. Más adelante, en la teoría de la cuantificación, estudiaremos este recurso.

Otro uso de 'si — luego' que habría que considerar aparte, es el *uso irreal*, en el cual el verbo del antecedente aparece en el modo subjuntivo; por ejemplo,

Si Bélgica hubiera aprobado la extensión de la Línea Maginot, entonces Francia habría sido inexpugnable.

Es evidente que la tabla empleada para el condicional no se adapta a este caso, y tampoco se adapta a él la traducción '$\sim (p \,.\, \sim q)$'. Si la falsedad del antecedente bastase para tornar verdadero un condicional de este tipo, todo condicional "irreal" * sería vacío e inútil, puesto que el antecedente ya se reconoce como falso. Puede verificarse fácilmente que el condicional irreal no se presta a ninguna formulación por medio de tablas de valores: no es *extensional*. Por consiguiente, cuando hablamos del condicional simple y lo entendemos en la forma extensional ya representada en la tabla, debemos recordar que no se trata del condicional irreal, el cual es una forma lingüística fácilmente distinguible de otras.

Evidentemente, el condicional irreal es un tipo de expresión menos claro y más dudoso (desde el punto de vista científico) que el condicional regular. Aquél y otros modos *intensionales* —o sea, no extensionales— de composición de enunciados, se dejarán de lado durante el estudio de la teoría de la composición; pero más adelante volveremos sobre el problema general de la composición intensional.

§ 8. *Implicación*

Antes de abandonar el asunto del condicional, vale la pena reparar en que todavía no he usado el verbo 'implicar'. En la literatura del caso hay una desgraciada confusión entre 'si — luego' e 'implica'; muchas veces se lee 'p implica q' en lugar de 'si p luego q', o '$\sim (p \,.\, \sim q)$'. La implicación no es un modo de la composición de enunciados; es una *relación* entre enunciados, así como, por ejemplo, el amor y el odio son relaciones entre personas. El verbo 'implica', como los verbos 'ama' y 'odia', debe intercalarse entre nombres y no entre enunciados. Para decir que Hitler odia a Stalin

* En los últimos años se han difundido, en la literatura especializada anglosajona, las denominaciones *contrary-to-fact conditional* y *counterfactual conditional* (N. del T.)

colocamos la palabra 'odia' entre los dos nombres propios y no entre los dos hombres; del mismo modo, para decir que un enunciado dado implica otro enunciado, debemos colocar la palabra 'implica' entre los *nombres* de los dos enunciados y no entre los enunciados mismos. Las palabras 'si — luego' se unen a los enunciados, por ejemplo, en la forma

Si hay nueve planetas, luego hay más de siete;

en cambio, la palabra 'implica' sólo se inserta entre sustantivos o nombres de enunciados, de la siguiente manera:

'Hay nueve planetas' implica 'hay más de siete planetas',

o bien

El décimo enunciado de la página implica el último.

Naturalmente, la implicación no se puede representar por medio de '$\sim (p \,.\, \sim q)$', ni por medio de una tabla de valores (porque la implicación no es una composición de enunciados) ni de manera alguna. Cuando dos enunciados "riman", ello no depende de los valores de los enunciados, y la relación en cuestión no nos lleva a la composición intensional de enunciados; lo mismo ocurre con la implicación.

¿Qué es, precisamente, la relación de implicación? La respuesta depende de la elección entre varios sentidos. Lo que podemos llamar *implicación lógica*, por ejemplo, es la relación existente entre dos enunciados, en un orden dado, cuando el condicional formado por los enunciados considerados en el mismo orden es lógicamente verdadero. Esta es la relación mediante la cual la lógica encuentra sus aplicaciones prácticas, tal como se anticipó en la Introducción. Análogamente, sobre la base de una noción de verdad física podríamos definir una noción de *implicación física*. Más adelante nos ocuparemos de ciertas nociones de implicación todavía más restringidas que la de implicación lógica.

Además de 'o' y 'si — luego', existen otros nexos extensionales, pero por ser bastante obvios no requieren un estudio detenido. Uno de ellos es el nexo 'ni' : 'ni p ni q'. Está claro que esta vinculación establece aquí simplemente una manera diferente de decir 'no p y no q', esto es, '$\sim p \,.\, \sim q$'.

Otro nexo, 'pero', puede sustituirse simplemente por '.'; desde el punto de vista lógico no se puede distinguir entre 'pero' e 'y'. La diferencia entre ambos es sólo retórica, como se ve por la comparación de estos dos ejemplos:

Juan está enfermo pero José está aquí,
Juan está enfermo y José está afuera.

La diferencia es retórica y no lógica, ya que la sustitución de 'pero' por 'y' o viceversa no tiene por efecto volver falso un enunciado verdadero sino, únicamente, aumentar o disminuir la naturalidad de la expresión.

Podríamos extender nuestro examen a otros nexos, tales como 'sino', 'aun cuando', 'a menos que', etc., para llegar a elaborar un diccionario elemental que guíe las traducciones en términos de '$\sim$' y '.'. Pero, como ya se vió al tratar 'o' y 'si — luego', el diccionario no podría consistir en una lista de correspondencias simples, como tampoco lo es un diccionario de traducción entre dos idiomas naturales.

Además, los mejores resultados en la traducción entre dos idiomas naturales se obtienen cuando, en lugar de atenernos rígidamente a las correspondencias sugeridas por el diccionario, procuramos elaborar la frase o el párrafo entero en el espíritu del nuevo idioma. La misma situación se presenta en la traducción del idioma natural a signos lógicos. Pero, si bien se necesita mucha práctica del idioma portugués antes de poder pensar una oración directamente en portugués, afortunadamente no se interpone tal obstáculo para pensar una frase en términos de '$\sim$' y '.' Estos signos ya

corresponden exactamente a dos palabras del idioma nativo, de manera que se trata, simplemente, de parafrasear una oración dada del idioma materno a otra oración perteneciente a un campo restringido del mismo idioma.

Es en este espíritu de *repensar* las ideas que debemos emprender las traducciones a signos lógicos. La necesidad de adoptar este punto de vista se manifiesta no sólo en el tratamiento de los nexos individuales, sino también en el problema del agrupamiento que suscitan los contextos complejos. Por ejemplo, en el compuesto

> Ni Felipe será descalificado, ni el Club Ideal ganará el primer premio y el Club Excelsior el segundo,

surge la cuestión de si debemos construir la totalidad en la forma '$\text{ni } p \text{ ni } (q \text{ y } r)$', o en la forma '$(\text{ni } p \text{ ni } q) \text{ y } r$'. Puede verificarse que estas dos formas, que simbólicamente se escriben '$\sim p \,.\, \sim (q.r)$' y '$(\sim p \,.\, \sim q) \,.\, r$' respectivamente, tienen tablas de valores diferentes. Pero de hecho no puede existir duda alguna de que el sentido correcto es '$\text{ni } p \text{ ni } (q \text{ y } r)$', en vista de que la palabra 'ganará' figura una sola vez para servir a las dos cláusulas que siguen. Tales son las indicaciones no sistemáticas de agrupamiento que se usan en el lenguaje ordinario, en contraste con el uso esquemático de los paréntesis, que caracteriza al lenguaje lógico.

Muchas veces, en el lenguaje ordinario, no se puede decidir la cuestión si no es recurriendo a un contexto más amplio, o a juicios psicológicos sobre los probables motivos del interlocutor. Por ejemplo, en el compuesto

> El Club Ideal ganará el premio y el Club Excelsior pasará al segundo puesto si Felipe fuese descalificado,

no hay indicaciones intrínsecas que permitan decidir entre las formas '$(p \text{ y } q) \text{ si } r$', y '$p \text{ y } (q \text{ si } r)$', esto es, entre las dos formas no equivalentes '$\sim (r \,.\, \sim (p \,.\, q))$' y '$p \,.\, \sim (r \,.\, \sim q)$'.

§ 10. *Traducción centrípeta*

Aun cuando la traducción simbólica deba realizarse pensando nuevamente el enunciado dentro del nuevo idioma, no debemos intentar hacer la traducción de súbito. Las tentativas de este género conducen habitualmente a errores cuando se trata de enunciados complejos como el siguiente:

(1) Si los montañeses continuaran recalcitrantes o los colonos se quejaran de nuevas depredaciones, entonces la autoridad del gobernador colonial no será reducida, ni la Junta abandonará su soberanía sobre el puerto, mientras no lleguen nuevas instrucciones del Ministerio de Colonias.

La técnica más segura es la de *traducción centrípeta*. Según esta técnica, el primer paso es decidir cuál es la estructura más exterior del enunciado dado, y después traducir el enunciado con relación a esta estructura exterior antes de tocar las partes interiores. En el ejemplo dado, no hay dificultad en reconocer que la estructura más exterior es 'si p luego q'; esto es, que el nexo principal del compuesto es 'si — entonces', por más que se trate de un típico problema de determinación del agrupamiento. Traduciendo el compuesto 'si p entonces q' en la forma '$\sim (p \,.\, \sim q)$', tenemos

(2) $\sim$ (los montañeses continuarán recalcitrantes o los colonos se quejarán de nuevas depredaciones . $\sim$ (la autoridad del gobernador colonial no será reducida, ni la Junta abandonará su soberanía sobre el puerto, mientras no lleguen nuevas instrucciones del Ministerio de Colonias)).

El segundo paso en la técnica de la traducción centrípeta es escoger un componente de máxima longitud, buscar su estructura más exterior, y luego traducir este componente en relación con esta estructura. En nuestro ejemplo, escogemos el componente 'la auto-

ridad... de Colonias' y decidimos (quizá con alguna duda acerca del agrupamiento) que su estructura exterior es la de 'p mientras q'. Observamos también que este nexo principal mientras tiene la fuerza de 'si' (por lo menos, en el contexto que nos ocupa), de manera que 'p mientras q' se puede entender como 'p si q', esto es, como 'si q entonces p' o '$\sim (q \,.\, \sim p)$. De este modo, el componente que estamos considerando recibe la siguiente traducción:

$\sim$ (no llegarán nuevas instrucciones del Ministerio de Colonias . $\sim$ (la autoridad del gobernador colonial no será reducida, ni la Junta abandonará su soberanía sobre el puerto)).

Al sustituir el componente 'la autoridad... de Colonias' por esta traducción, dentro del contexto (2), advertimos que surge la combinación '$\sim \sim$', cuya superfluidad se ve en la tabla siguiente:

p	$\sim p$	$\sim \sim p$
V	F	V
F	V	F

Para no tener que referirnos con frecuencia a la equivalencia entre '$\sim \sim p$' y 'p', es conveniente decretar la inexistencia de la notación '$\sim \sim p$', considerando en general que la manera de negar una negación es, simplemente, la de borrar su tilde en lugar de duplicarlo. Así llegamos a

(3) $\sim$ (los montañeses continuarán recalcitrantes o los colonos se quejarán de nuevas depredaciones . no llegarán nuevas instrucciones del Ministerio de Colonias . $\sim$ (la autoridad del gobernador colonial no será reducida, ni la Junta abandonará su soberanía sobre el puerto)).

El próximo paso en la aplicación de la técnica de la traducción centrípeta consiste, como el anterior, en la elección de un componente de longitud máxima y su traducción en relación con la estructura más exterior. Así se continúa hasta que sólo queden componentes simples. En nuestro ejemplo, tomaremos el componente

'la autoridad . . . el puerto', y observaremos que tiene la forma 'ni p ni q', esto es, '$\sim p \,.\, \sim q$'. La traducción de este componente será, pues,

$\sim$ la autoridad del gobernador colonial será reducida . $\sim$ la Junta abandonará su soberanía sobre el puerto.

La sustitución de este componente en (3) lo transforma en

(4) $\sim$ (los montañeses continuarán recalcitrantes o los colonos se quejarán de nuevas depredaciones . no llegarán nuevas instrucciones del Ministerio de Colonias . $\sim$ ($\sim$ la autoridad del gobernador colonial será reducida . $\sim$ la Junta abandonará su soberanía sobre el puerto)).

En seguida observamos que el componente 'los montañeses ... depredaciones' tiene la forma 'p o q'. Y finalmente advertimos que el componente 'no llegarán nuevas instrucciones del Ministerio de Colonias' tiene la forma 'no p', esto es, '$\sim p$'. Con estas traducciones en (4) obtenemos como resultado final

(5) $\sim$ ($\sim$ ($\sim$ los montañeses continuarán recalcitrantes . $\sim$ los colonos se quejarán de nuevas depredaciones) . $\sim$ llegarán nuevas instrucciones del Ministerio de Colonias . $\sim$ ($\sim$ la autoridad del gobernador colonial será reducida . $\sim$ la Junta abandonará su soberanía sobre el puerto)).

La forma ejemplificada es

$$'\sim (\sim (\sim p \,.\, \sim q) \,.\, \sim r \,.\, \sim (\sim s \,.\, \sim t))'.$$

§ 11. *Equivalencia composicional*

Traducciones semejantes en términos de '$\sim$' y '.' tienen por efecto revelar y descubrir equívocos, ya sea acerca del sentido de algunos de los nexos empleados en el lenguaje natural, ya por los modos

de agrupamiento. Pero el propósito primordial de estas traducciones es el de hacer que los enunciados se tornen tratables por las técnicas de las tablas de valores, por medio de las cuales podemos determinar que ciertos enunciados son equivalentes a otros, o se siguen lógicamente de otros.

La sola traducción revela inmediatamente ciertas equivalencias, al transformar varios enunciados del lenguaje natural en un único enunciado en términos de '~' y '.'. Por ejemplo, las proposiciones siguientes:

Si este río corre hacia el norte y aquel valle no penetra en la sierra, entonces estamos en la cuenca del Amazonas,

y

Si este río corre hacia el norte, entonces o aquel valle penetra en la sierra, o estamos en la cuenca del Amazonas,

se traducen, conforme a la técnica de la traducción centrípeta que hemos estudiado, en este único enunciado:

~ (este río corre hacia el norte . ~ aquel valle pentra en la sierra . ~ estamos en la cuenca del Amazonas).

Pero aún quedan por determinar otras equivalencias después de la traducción en términos de '~' y '.', ya que, como lo observáramos anteriormente (§ 5), diferentes compuestos de '~' y '.' pueden tener una misma tabla de valores. La técnica que permite determinar tal equivalencia consiste en construir una tabla sobre la base de los componentes simples de los dos compuestos que queremos comparar, deduciendo en seguida las columnas correspondientes a los dos compuestos; finalmente, se observa si estas columnas son iguales. Por ejemplo, para probar la equivalencia de los enunciados

Si continúa la sequía habrá hambre y emigración,

Si continúa la sequía habrá hambre, y si continúa la sequía habrá emigración,

traducimos las proposiciones en términos de '~' y '.' de la manera siguiente:

~ (continúa la sequía . ~ (habrá hambre . habrá emigración))
~ (continúa la sequía . ~ habrá hambre) . ~ (continúa la sequía . ~ habrá emigración)

y después, usando '*p*', '*q*' y '*r*' para abreviar, en lugar de 'continúa la sequía', 'habrá hambre' y 'habrá emigración' respectivamente, construímos la Tabla 6 según las técnicas conocidas (§ 4).

p	q	r	$\sim (p \,.\, \sim (q \,.\, r))$	$\sim (p \,.\, \sim q) \,.\, \sim (p \,.\, \sim) r$
V	*V*	*V*	*V*	*V*
F	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*F*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*V*	*V*

Tabla 6

Para ser exactos, examinemos la expresión 'componente simple', que acabamos de usar en la formulación de la técnica para determinar equivalencias. No se trata en este caso de una simplicidad absoluta; los componentes "simples" pueden poseer un grado de complejidad cualquiera en relación, sea el caso, con las estructuras cuantificacionales que consideraremos más adelante. Los componentes "simples" de un enunciado dado no son sino los enunciados (ni conjuntivos ni negativos) que se combinan por conjunción y negación para formar el enunciado dado.

La relación de equivalencia que se verifica mediante la comparación de cuadros de valores, es evidentemente la relación entre dos enunciados construídos por medio de conjunción y negación, de manera tal que sus valores concuerdan independientemente de los valores de los componentes simples. La equivalencia de enun-

ciados es la relación que consiste en *compartir el mismo valor únicamente en virtud de sus estructuras composicionales*. Por tal motivo esta relación puede llamarse *equivalencia composicional*. Dicho de modo más general, pueden llamarse *lógicamente equivalentes* todos los enunciados que tienen el mismo valor en virtud de sus estructuras lógicas, esto es, en virtud de sus estructuras en relación con el vocabulario lógico. De esta manera, la equivalencia composicional constituye aquella especie de equivalencia lógica en la que sólo se consideran dos elementos, '$\sim$' y '.', del vocabulario lógico.

Como nos lo reveló el cuadro anterior, dos enunciados cualesquera de la forma

(1) $\sim (p \,.\, \sim (q \,.\, r)), \qquad \sim (p \,.\, \sim q) \,.\, \sim (p \,.\, \sim r)$

son composicionalmente equivalentes. Otros ejemplos son, como ya se ha visto (§ § 3, 10), todos los pares de las formas

$$(p \,.\, q) \,.\, r, \qquad p \,.\, (q \,.\, r),$$
$$\sim\sim p, \qquad p.$$

Pero hemos convenido en absorber estas equivalencias en la propia notación, abandonando el uso de '$\sim\sim$' y del paréntesis dentro de la conjunción iterativa. Otros ejemplos de equivalencia composicional se manifiestan en los pares de formas

(2) $p \,.\, q, \qquad q \,.\, p$

(3) $p \,.\, p, \qquad p$

(4) $p \,.\, \sim (q \,.\, \sim p), \qquad p$

(5) $p \,.\, \sim p, \qquad q \,.\, \sim q,$

como puede verificarse construyendo tablas dobles de la manera que ya hemos indicado.

En la práctica, el método de verificar equivalencias por tablas se reemplaza muchas veces por un proceso de transformaciones sucesivas. Por ejemplo, conociendo la equivalencia de dos enunciados cualesquiera que poseen una de las formas (1)-(5), podemos establecer la equivalencia de dos enunciados cualesquiera de las formas

(6) $p \,.\, \sim (q \,.\, \sim q), \qquad p$

Para ello procedemos de la manera siguiente: '$p \,.\, \sim (q \,.\, \sim q)$' equivale, en razón de (5), a '$p \,.\, \sim (p \,.\, \sim p)$', lo que a su vez, en virtud de (4), equivale a 'p'.

Igualmente, podemos establecer la equivalencia de dos enunciados cualesquiera de la forma

(7) $p \,.\, q \,.\, \sim q, \qquad r \,.\, \sim r$

de la manera siguiente: '$p \,.\, q \,.\, \sim q$' equivale, por (5), a '$p \,.\, p \,.\, \sim p$', lo que a su vez, por (3), equivale a '$p \,.\, \sim p$', que finalmente, por (5), equivale a '$r \,.\, \sim r$'.

Tales transformaciones, realizadas sobre la base de (1)-(5), bastan para establecer cualquier equivalencia composicional. Las deducciones se abrevian si se usan no sólo los resultados (1)-(5) sino también cualquiera de los demás pares ya encontrados. Así, por medio de (1)-(5), con ayuda de (6), podemos obtener

(8) $p \,.\, \sim (p \,.\, q), \qquad p \,.\, \sim q$

de la manera siguiente: '$p \,.\, \sim (p \,.\, q)$' es la negación de '$\sim (p \,.\, \sim (p \,.\, q))$', dada la abolición de '$\sim \sim$'; entonces, por (1), '$p \,.\, \sim (p \,.\, q)$' equivale a '$\sim (\sim (p \,.\, \sim p) \,.\, \sim (p \,.\, \sim q))$' que a su vez, por (2), equivale a '$\sim (\sim (p \,.\, \sim q) \,.\, \sim (p \,.\, \sim p))$'; esta última forma equivale a su vez, por (6), a '$p \,.\, \sim q$'.

De igual modo, la equivalencia

(9) $\sim (p \,.\, q) \,.\, \sim (p \,.\, \sim q), \qquad \sim p$

se obtiene de la manera siguiente: '$\sim (p \,.\, q) \,.\, \sim (p \,.\, \sim q)$' equivale, por (1), a '$\sim (p \,.\, \sim (\sim q \,.\, q))$', que, por (2), equivale a '$\sim (p \,.\, \sim (q \,.\, \sim q))$', que por (6) equivale a '$\sim p$'.

En la práctica, el conocimiento y el uso de este arsenal de formas puede facilitar el descubrimiento de equivalencias composicionales, y, en particular, puede ser útil cuando se intenta reducir un enunciado a su equivalente más simple (cf. § 5). Pero es un lujo del que se puede prescindir, ya que es suficiente el criterio anterior

de las tablas de valores para decidir cualquier equivalencia composicional. Además, el criterio de las tablas posee la ventaja fundamental de ser puramente mecánico, mientras que la tentativa de establecer la equivalencia deseada por medio de transformaciones requiere, en general, una búsqueda no sistemática.

§ 12. *Implicación composicional*

La *implicación composicional* es la relación de un enunciado con todo enunciado que se deduzca de él sólo en virtud de las estructuras composicionales. Un enunciado compuesto implica composicionalmente a otro cuando ambos están constituídos por medio de conjunciones y negaciones de manera tal que ninguna alteración de los valores de los componentes simples pueda tornar simultáneamente verdadero al primer compuesto y falso al segundo. Por consiguiente, la implicación composicional se determina, como la equivalencia composicional, por medio de tablas dobles; pero en la determinación de la implicación no es necesario completar la columna correspondiente al segundo enunciado, en aquellas de sus casillas que corresponden a las casillas bajo el primer enunciado ocupadas por '*F*'. Por ejemplo, para verificar que el enunciado

Si Juan no viene, vendrán José y Felipe

implica, composicionalmente, el enunciado

Juan o Felipe vendrán,

traducimos los enunciados en términos de '$\sim$' y '.' de la manera siguiente:

$\sim$ ($\sim$ Juan vendrá . $\sim$ (José vendrá . Felipe vendrá)),
$\sim$ ($\sim$ Juan vendrá . $\sim$ Felipe vendrá),

y en seguida, usando por brevedad '*p*', '*q*' y '*r*' en lugar de los tres componentes simples, construimos la Tabla 7. En ella advertimos que al segundo compuesto le corresponde '*V*' en todos los casos

en que le corresponde al primero. Nos hemos ahorrado el trabajo de deducir el valor del segundo compuesto en los otros casos, dado que ya hemos establecido la implicación.

p	q	r	$\sim(\sim p \,.\, \sim(q \,.\, r))$	$\sim(\sim p \,.\, \sim r)$
V	V	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	F	V	F	—
V	V	F	V	V
F	V	F	F	—
V	F	F	V	V
F	F	F	F	—

Tabla 7

Decir que al segundo compuesto le corresponde 'V' en todos los casos en que le corresponda al primero, es lo mismo que decir que al primero le corresponde 'F' siempre que también le corresponda al segundo. Por esto, otro método adecuado, es el de construir la columna íntegra del segundo compuesto, construyendo después solamente una parte de la columna del primero, considerando tan sólo los casos en que al segundo compuesto le corresponde 'F'. Este método es recomendable cuando, como ocurre en el ejemplo que acabamos de tratar, el segundo compuesto es más simple que el primero. Si hubiéramos empleado este método en dicho ejemplo, habríamos tenido que calcular el valor del primer componente sólo en dos casos.

Otros ejemplos sencillos de implicación composicional, verificables por tablas, son los siguientes: '$p \,.\, q$' implica 'p'; '$\sim p$' implica '$\sim(p \,.\, q)$'; '$p \,.\, \sim(p \,.\, q)$' implica '$\sim q$', donde las letras simbolizan enunciados cualesquiera.

Todo ejemplo de equivalencia (§ 11) nos da, a su vez, dos ejemplos de implicación, porque, como es evidente, la equivalencia es simplemente una implicación recíproca. Por esto es que la teoría de la equivalencia puede ser considerada como una parte de la

teoría de la implicación. Pero, inversamente, la teoría de la implicación puede ser considerada como una parte de la teoría de la equivalencia, pues, como se ve fácilmente, un enunciado implica otro si, y sólo si el primero equivale a la conjunción de los dos.

§ 13. *Verdad composicional*

Como toda verdad en que figura esencialmente sólo el vocabulario lógico se denomina *lógicamente* verdadera (cf. Introducción), podemos llamar en particular *composicionalmente verdadera* a toda verdad en que sólo figura esencialmente la parte composicional del vocabulario lógico, esto es, sólo las notaciones de conjunción y negación. En otras palabras: así como un enunciado se llama lógicamente verdadero si es verdadero únicamente debido a su estructura lógica, se llama en particular composicionalmente verdadero si es verdadero únicamente en virtud de su estructura composicional.

Si bien la verdad lógica en general no admite un criterio mecánico, la especie de ella que denominamos verdad composicional admite un criterio mecánico, y por cierto muy simple: basta construir la tabla del enunciado y observar si la columna final exhibe '*V*' en todos los lugares. Por ejemplo, para demostrar la verdad composicional del enunciado

Si Juan y José vienen, entonces vendrá Juan,

lo traducimos en signos lógicos del modo siguiente:

$\sim$ (Juan vendrá . José vendrá . $\sim$ Juan vendrá)

y construimos la tabla correspondiente:

p	q	$\sim (p \,.\, q \,.\, \sim p)$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	V

Por medio de la verdad composicional, la implicación composicional admite una formulación análoga a la formulación de la implicación lógica que hemos propuesto anteriormente (§ 8) sobre la base de la verdad lógica. Se ve fácilmente que un enunciado implica otro composicionalmente si, y solamente si el condicional que tiene como antecedente el primer enunciado y el segundo como consecuente, es composicionalmente verdadero. El ejemplo de verdad composicional citado más arriba corresponde directamente a la implicación, ya observada (§ 12), entre 'p . q' y 'p'. Si bien la teoría de la implicación composicional (y por consiguiente también la de la equivalencia composicional) se puede considerar de este modo como una parte de la teoría de la verdad composicional, la conclusión inversa es igualmente correcta; porque, como se verifica fácilmente, un enunciado es composicionalmente verdadero si, y solamente si es implicado composicionalmente por su negación. De hecho, las teorías de la verdad composicional, de la implicación composicional y de la equivalencia composicional no son sino aspectos de una única teoría, la teoría de la composición.

En el estudio de la equivalencia (§ 11) hemos observado que el método de las tablas puede ser sustituído o auxiliado por un método de transformaciones sucesivas. Este método se puede generalizar para la verificación de implicaciones y verdades composicionales. El método general consiste en comenzar con una cierta lista de enunciados iniciales y en prolongar la lista paso a paso, de manera que cada uno de los enunciados agregados sea el resultado de una transformación (sobre la base de una equivalencia conocida) de un enunciado ya registrado, o bien sea inferido a partir de un enunciado ya registrado o de una conjunción de ellos sobre la base de una implicación conocida. La conjunción de los enunciados iniciales de la lista, con omisión de los que son composicionalmente verdaderos, implica cada uno de los enunciados derivados que figuran en la lista; y si todos los enunciados iniciales son composicionalmente verdaderos, también lo serán los derivados. Este método en cadena sirve, pues, para deducir tanto implicaciones como verdades composicionales. Es, sin embargo, un método

del que se puede prescindir, como lo era el método análogo para engendrar equivalencias (cf. § 11); las sencillas técnicas de las tablas son suficientes.

§ 14. *Reducción ulterior. Observaciones diversas*

La conjunción y la negación pueden reducirse a un nexo único, el de *negación conjunta*, cuyo signo lógico es ' $\downarrow$ '. El compuesto '$p \downarrow q$' tiene el sentido de 'ni p ni q'; está caracterizado por la tabla siguiente:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
F	V	F
V	F	F
F	F	V

La negación '$\sim p$' y la conjunción '$p \,.\, q$' pueden expresarse en términos de la negación conjunta de las maneras '$p \downarrow p$' y '$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$' respectivamente, como se ve formando las tablas de estos compuestos sobre la base de la tabla de '$p \downarrow q$'.

Otra reducción igualmente posible tiene por base la *negación alternada* * '$p \mid q$', caracterizada por la tabla

p	q	$p \mid q$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	V

La negación '$\sim p$' y la conjunción '$p \,.\, q$' pueden expresarse en las formas '$p \mid p$' y '$(p \mid q) \mid (p \mid q)$' respectivamente [3].

* La negación alternada también suele llamarse incompatibilidad; en tal caso 'p | q' se lee 'p incompatible q' (N. del T.).

[3] Estas reducciones, tanto a la negación conjunta como a la negación alternada, fueron propuestas por Sheffer (1913). Ambas ya eran conocidas por Peirce, pero sus notas sólo aparecieron en 1933 (vol. 4, §§ 12, 264).

Una de las ventajas teóricas de semejante reducción es que simplifica la formulación estricta de la noción de verdad condicional. Del solo uso de '$\downarrow$' en vez de '$\sim$' y '.', resulta que *un enunciado es composicionalmente verdadero si, y solamente si pertenece a una clase* x *que satisface a la siguiente condición: a* x *pertenecen exactamente aquellos enunciados que no son componentes inmediatos* [4] *de ninguna negación conjuntiva que pertenezca a* x. A pesar de que es preciso leer varias veces esta formulación antes de comprenderla, y meditar sobre ella aun más antes de convencerse de su exactitud, es una formulación mucho más simple de lo que sería una formulación, igualmente exacta, que tratase explícitamente de las tablas y del uso de las letras '*V*' y '*F*'.

Otra formulación de la verdad composicional, pero basada ahora sobre el uso de '$|$' en vez de '$\sim$' y '.', es ésta: *un enunciado es composicionalmente verdadero si, y solamente si pertenece a una serie de enunciados cada uno de los cuales, o tiène la forma*

$$(p \mid (q \mid r)) \mid ((s\ (s \mid s)) \mid ((s \mid q) \mid ((p \mid s) \mid (p \mid s)))),$$

o es tal que el resultado de escribirlo en el último espacio en blanco de '( ) | (( ) | ( ))', *y de escribir cierto enunciado anterior de la serie en el primer blanco y cierto enunciado cualquiera en otro blanco, es uno de los enunciados anteriores de la serie.* Esta formulación es interesante porque incorpora un método deductivo para engendrar verdades composicionales a partir de una base restringida y con el empleo de una regla simple de deducción. En lo que respecta a economía y precisión, es una culminación del tipo de teoría que hemos ilustrado antes, al desarrollar las equivalencias por transformaciones sucesivas (§ 11). La demostración de que esta formulación abarca todas las verdades composicionales es complicada [5].

Cuando nos interesamos por la lógica como instrumento y no

[4] Los *componentes inmediatos* de un negativo conjunto S (o de una conjunción S, etc.) son aquellos enunciados cuyo negativo conjunto (o conjunción, etc.) es S.

[5] En la literatura se encuentra varias demostraciones de esta afirmación, pero con relación a bases y reglas de deducción diferentes. La primera fue la de Post (1921); una más breve y simple es la mía (1938). El descubrimiento de que la base y la regla utilizadas aquí equivalen a bases y reglas reconocidamente ade-

como objeto de indagación teórica, es mucho más fácil y útil formular explícitamente las nociones de verdad, implicación y equivalencia composicionales sobre la base de tablas. También es más fácil conservar '.' y '$\sim$'; los compuestos escritos usando '$\downarrow$' (o igualmente '$|$') alcanzan longitudes inconvenientes.

Las aplicaciones prácticas de las técnicas de la teoría de la composición se encuentran, en su mayoría, dentro de la teoría de la cuantificación, cuyo estudio abordaremos en seguida. Como veremos, las técnicas cuantificacionales utilizan las técnicas composicionales de una manera esencial. En las ciencias naturales y en la vida diaria, no es frecuente que la investigación de implicaciones lógicas entre proposiciones descanse únicamente sobre estructuras puramente composicionales, sin interferencia de estructuras cuantificacionales. Con todo, de vez en cuando encontramos enunciados de un considerable grado de complejidad puramente composicional, como el ejemplo de los montañeses y colonos (§ 10); y en estos casos ya se busque un enunciado equivalente más simple, ya se procure una relación de implicación entre el compuesto dado y otros, son aplicables las técnicas puras de la teoría de la composición.

El ingeniero norteamericano C. E. Shannon emplea ventajosamente esta técnica para resolver ciertos problemas de diseño y simplificación de redes eléctricas. Si un circuito se compone de dos ramas A y B, la condición de cierre del circuito es la conjunción 'A se cierra . B se cierra' en el caso en que A y B están dispuestas en serie; y si A y B están dispuestas en paralelo, la condición es '$\sim$ ($\sim A$ se cierra . $\sim B$ se cierra)'. De aquí resulta cierta correspondencia entre el diseño de un red eléctrica compleja y el diseño de un compuesto complejo en la teoría de la composición, de manera que el comportamiento de la red se puede calcular, hasta cierto punto, por medio de las técnicas composicionales. El problema de simplificar la red conservando su efecto se transforma en el problema lógico de reducir un compuesto a su equivalente más simple.[6]

cuadas, se debe a Lukasiewicz (1929), quien se fundó en resultados de Nicod (1918).

[6] Véase, además del artículo de Shannon, mi "Relations and Reason".

II. Teoría de la cuantificación

§ 15. *El cuantificador*

El paso más importante en la génesis de la lógica moderna fue la creación de la teoría de la cuantificación, debida a Frege (1879). Esta teoría rige el uso de los prefijos '(x)', '(y)', etc., llamados *cuantificadores*. Estos se anteponen a expresiones que tienen la forma de enunciados, pero en los que figuran las letras 'x', 'y', etc., en lugar de nombres de objetos. El resultado, llamado *cuantificativo*, es verdadero si, y solamente si la expresión que sigue al prefijo es verdadera cualquiera sea el objeto que se imagine como designado por la letra 'x' (o 'y', etc.). El prefijo '(x)' puede leerse 'cualquiera sea x', o igualmente 'todo objeto x es tal que'; análogamente para '(y)', etc. Así, por ejemplo, '(x) x existe' significa 'Cualquiera que sea x, x existe'; esto es, 'Todo objeto x es tal que x existe'; en resumen, 'Todo objeto existe'. Análogamente, '(y) $y = y$' significa 'Cualquiera sea y, $y=y$'; esto es, 'Todo objeto es tal que $y=y$'; vale decir, 'Todo objeto es idéntico a sí mismo'.

Se está viendo, pues, que la cuantificación corresponde de manera indirecta al uso, en el lenguaje natural, de la palabra 'todo', o mejor dicho 'todo objeto'. La correspondencia es indirecta porque 'todo objeto' figura sintácticamente como sustantivo, a pesar de que la cuantificación no ofrezca ningún sustantivo correspondiente. Esta ausencia de correspondencia sintáctica es una ventaja del procedimiento de la teoría de la cuantificación, porque la forma nominal de la expresión 'todo', o 'todo objeto', es una figura engañosa del idioma natural. Esto se advierte en el ejemplo

(1) Todo objeto es hombre o diferente de hombre.

Si bien el enunciado

Bucéfalo es hombre o diferente de hombre

puede considerarse como una abreviación de

Bucéfalo es hombre o Bucéfalo es diferente de hombre,

el enunciado (1) no puede, en cambio, ser considerado como una abreviación de

(2) Todo objeto es hombre o todo objeto es diferente de hombre.

El compuesto (2) es falso, por ser la ligazón, efectuada por 'o', de dos enunciados falsos; pero (1) es evidentemente verdadero. En la notación de la teoría de la cuantificación, (1) y (2) se distinguen entre sí, en que (1) se escribe

(3) (x) (x es hombre o x es diferente de hombre)

o bien, traduciendo 'p o q' por '$\sim (\sim p \,.\, \sim q)$',

(4) $(x) \sim (\sim x$ es hombre $.\ \sim x$ es diferente de hombre).

En cambio, (2) se escribe

(5) (x) x es hombre o (x) x es diferente de hombre,

esto es,

(6) $\sim (\sim (x)$ x es hombre $.\ \sim (x)$ x es diferente de hombre).

(Convendremos que el cuantificador, al igual que el tilde, gobierna el texto mínimo compatible con la colocación de los paréntesis; en (5) y (6), por ejemplo, el primer '(x)' sólo gobierna a 'x es hombre').

Otro ejemplo: aun cuando los enunciados 'El nuevo muelle no es combustible' y 'El nuevo muelle es incombustible' sean meras variaciones verbales uno del otro, no está claro que el enunciado

'Todo objeto no es combustible' sea una mera variación verbal del enunciado falso 'Todo objeto es incombustible', esto es, '(x) x es incombustible', o

(7) $(x) \sim x$ es combustible.

El enunciado 'Todo objeto no es combustible' es susceptible, también, de cobrar el sentido 'No todo objeto es combustible', esto es,

(8) $\sim (x)$ x es combustible,

que niega el cuantificativo falso '(x) x es combustible'.

La única diferencia entre las verdades (3), (4) y (8), por una parte, y por otra las falsedades (5), (6) y (7), es la diferencia de agrupamiento, o de colocación del cuantificador. Una ventaja de la notación de los cuantificadores es que indica explícitamente lo que se esconde o se expresa en forma no sistemática en el lenguaje natural.

Otro ejemplo ilustrativo del carácter engañoso del lenguaje natural es éste: aun cuando el enunciado 'Bucéfalo es idéntico a Bucéfalo' sólo sea otra manera de decir la verdad 'Bucéfalo es idéntico a sí mismo', en cambio el enunciado 'Todo objeto es idéntico a todo objeto' está lejos de equivaler a la verdad 'Todo objeto es idéntico a sí mismo'. La expresión 'todo objeto' no se comporta como un sustantivo normal.

Otro seudosustantivo del lenguaje natural, exactamente análogo a 'todo objeto', es 'algún objeto'; otro más es 'ningún objeto', o más brevemente 'nada'. La notación de la cuantificación, junto con la de la negación, basta para traducir estas expresiones tanto como para traducir la expresión 'todo objeto'. Por ejemplo, la cuantificación falsa (7) puede leerse 'ningún objeto es combustible', esto es, 'nada es combustible'; y por consiguiente su negación

(9) $\sim (x) \sim x$ es combustible

puede leerse 'Algún objeto es combustible', o 'Algunos objetos son combustibles'. Así como el prefijo simple '(x)' tiene el sentido de 'todo objeto x es tal que', de estos últimos ejemplos deducimos que los prefijos complejos '$(x) \sim$' y '$\sim (x) \sim$' tienen, efectivamente,

los sentidos de 'ningún objeto x es tal que' y 'algún objeto x es tal que' respectivamente. Pero obsérvese que las combinaciones '$(x) \sim$' y '$\sim (x) \sim$' no son unidades propias; cada uno de los signos individuales se aplica al contexto que sigue, de manera que (9) es la negación de (7), y a su vez (7) es el cuantificativo de '$\sim$ x es combustible', que por su parte es la negación de 'x es combustible'.

El uso de la palabra 'todo' junto a un término menos general que 'objeto', como por ejemplo en 'todo hombre', también se traduce, sobre la base de la cuantificación, con ayuda de la negación y de la conjunción. El enunciado 'Todo hombre es mortal', que afirma que ningún objeto es hombre y al mismo tiempo no mortal, se escribe

$$(x) \sim (x \text{ es hombre} \,.\, \sim x \text{ es mortal}).$$

Aquí tenemos un condicional cuantificado, que es precisamente la estructura que habíamos anticipado en el § 7, llamándola condicional general. El ejemplo que habíamos considerado entonces era 'Si alguna cosa me interesa, entonces le aburre a Jorge'; esto es, 'Todo lo que me interesa le aburre a Jorge'; o sea,

$$(x) \sim (x \text{ me interesa} \,.\, \sim x \text{ le aburre a Jorge}) \,.$$

También el uso de 'ningún' y 'algún' se traduce fácilmente. El enunciado 'Ningún pájaro tiene pelo' se escribe

$$(x) \sim (x \text{ es pájaro} \,.\, x \text{ tiene pelo})$$

y su negación 'Algunos pájaros tienen pelo' se escribe

$$\sim (x) \sim (x \text{ es pájaro} \,.\, x \text{ tiene pelo}) \,.$$

§ 16. *Pronombres lógicos*

Las letras 'x', 'y', etc., auxiliares de la notación cuantificacional, se llamarán *pronombres lógicos*. Su carácter pronominal se torna evidente si observamos que '(x) x existe', '(y) $y = y$', etc., pueden

leerse en la forma 'Todo objeto es tal que *él* existe', 'Todo objeto es tal que *él* es idéntico a *él*', etc. Salta a la vista que, mientras el cuantificador '(x)' (o '(y)', etc.) corresponde a las palabras 'todo objeto es tal que', el pronombre lógico 'x' (o 'y', etc.) corresponde, en los lugares posteriores al cuantificador, al pronombre 'él'. En otros ejemplos, por supuesto, el pronombre puede ser 'le' en lugar de 'él'; pero siempre es un pronombre que se refiere a las palabras 'todo objeto', que forman parte de la expresión verbal correspondiente al cuantificador.

Obsérvese que es errónea la tan difundida idea de que los pronombres son, antes que nada, sustitutos de los nombres. En los ejemplos que acabamos de dar, el pronombre desempeña una función que está fuera del alcance de los nombres, porque en el contexto en cuestión no se trata simplemente de cierto objeto nominable. Ya hemos visto que sólo por un desgraciado accidente del lenguaje la expresión 'todo objeto', antecedente gramatical del pronombre, posee una forma nominal. Lejos de basarse sobre los nombres, los pronombres son, desde el punto de vista lógico, mucho más fundamentales que los nombres; este punto se aclarará progresivamente en lo que sigue, y especialmente en el § 41.

La razón por la cual adoptamos varias letras, 'x', 'y', etc. como pronombres lógicos en lugar de una sola, se advierte en cuanto se intenta traducir en símbolos el enunciado 'Todo hombre comprende alguna lengua'. Aplicando el método de la traducción centrípeta, hacemos el primer paso de la traducción de la siguiente manera:

$$(x) \sim (x \text{ es hombre} \,.\, \sim x \text{ comprende alguna lengua}) \,.$$

Pero para traducir la parte subordinada, 'x comprende alguna lengua', necesitamos usar otra letra; así se convierte en

$$\sim (y) \sim (y \text{ es lengua} \,.\, x \text{ comprende } y) \,.$$

El enunciado íntegro queda entonces en la forma

(1) $$(x) \sim (x \text{ es hombre} \,.\, (y) \sim (y \text{ es lengua} \,.\, x \text{ comprende } y)) \,.$$

La elección de letras diferentes corresponde, en el lenguaje natural, al uso de las palabras 'aquél' y 'éste', o 'primero', 'segundo', tercero', etc., para evitar que se confundan los referentes de los diversos pronombres. El enunciado (1) corresponde literalmente a las palabras

> Todo objeto es tal que: no es que *él* es hombre, y que todo objeto es tal que no es que *ésta* es lengua y *aquél* comprende a *ésta*.

Otro ejemplo que muestra la necesidad de emplear pronombres lógicos distintos es el enunciado falso 'Todo objeto es idéntico a todo objeto', mencionado anteriormente (§ 15). Dos pasos de traducción centrípeta lo reducen a '$(x)\ (y)\ x = y$', que contrasta con el enunciado verdadero '$(x)\ x = x$', o $(y)\ y = y$' .

Naturalmente, el uso de letras como pronombres lógicos fue calcado del uso de letras como "variables" en el álgebra. Así los pronombres lógicos se llaman usualmente variables; estoy evitando este término sólo para acentuar que no se trata de objetos especiales que sufren un proceso de variación. Tampóco al álgebra conviene la noción de variación; las llamadas variables del álgebra son también, en último análisis, meros pronombres lógicos. La teoría de la cuantificación aclara así la noción general de variable, tan fundamental para la matemática. Un ejercicio elemental es tomar una página típica de un libro de matemática y hacer explícitas todas las cuantificaciones, de manera que cada "variable" asuma el papel de un pronombre lógico referido a uno u otro de los cuantificadores. Un argumento que comienza por ejemplo, con las palabras 'Sea x un número primo', se convierte en un condicional general de la forma

$$(x) \sim (x \text{ es número primo} \,.\, \sim \ldots)$$

donde el espacio en blanco está ocupado por el cuerpo del argumento, que bien puede alcanzar varios párrafos de extensión.[7]

[7] El carácter pronominal de las variables fue señalado por Peano en 1897 (p. 26).

§ 17. *Matrices y esquemas*

Las expresiones del tipo '$x = y$', '$y = y$', 'x es combustible', '$\sim x$ es combustible', etc., a las que se acostumbra aplicar cuantificadores, se llaman *matrices*. Aun cuando tengan la forma de enunciados, las matrices no son, en general, enunciados, pues no son verdaderas n falsas, y ello ocurre debido a la presencia de pronombres *libres*, es decir, pronombres a los cuales les falta un cuantificador. La matriz 'x es combustible' no es verdadera ni falsa, como tampoco lo es su equivalente verbal '*él* es combustible' en ausencia de algún antecedente gramatical del pronombre '*él*'. Con todo, es conveniente considerar también los enunciados como matrices, pues son un caso extremo de éstas. La noción de matriz es, pues, más general que la de enunciado. En general, una matriz es un enunciado o bien puede convertirse en un enunciado (verdadero o falso) por la aplicación de uno o más cuantificadores.

Hay una diferencia fundamental entre las matrices y las expresiones del tipo de '$\sim (p \,.\, \sim q)$' que se emplean en la teoría de la composición, y en las que aparecen las letras 'p', 'q', etc. Estas expresiones, llamadas *esquemas*, son meros diagramas que tienen el propósito de facilitar el tratamiento de las formas generales de los enunciados. Desde el punto de vista formal, la diferencia fundamental es ésta: toda matriz puede figurar como parte de un enunciado, si la matriz se somete a cuantificadores dentro de un contexto más extenso; en cambio, ningún esquema puede figurar de esta manera. Las matrices son fragmentos de enunciados —cuando no son enunciados propiamente dichos— mientras que los esquemas son diagramas de enunciados.

Esta diferencia depende, por supuesto, de que los cuantificadores sólo contienen pronombres 'x', 'y', etc., y nunca las letras esquemáticas 'p', 'q', etc. Pero no se trata de una diferencia arbitraria. Podría pensarse que las matrices y los esquemas son esencialmente análogos, diferenciándose solamente en que los esquemas exhiben las letras 'p', 'q', etc., para representar los enunciados componentes, mientras

que las matrices exhiben los signos 'x','y', etc., para representar nombres componentes. El esquema '$\sim (p \,.\, \sim q)$' se convierte en enunciado sustituyendo las letras por enunciados, y la matriz '$x = y$', o 'x es combustible', puede volverse enunciado con la sustitución de letras por nombres, tales como 'Rio de Janeiro', 'Capital del Brasil', o 'Muelle 13 de Pôrto-Alegre'. Pues bien, es precisamente por eso que surge este contraste: los pronombres 'x', 'y', etc., *admiten nombres de objetos cualesquiera* como *sustitutos*, y de este modo *indican* o *se refieren* a cualquiera de los objetos nombrados; en cambio, las letras esquemáticas sólo *admiten* otros sustitutos que los *nombres*, y por lo tanto ni *indican* ni *se refieren* a cualquier objeto, sea concreto, sea abstracto. Así, a una matriz le podemos aplicar el cuantificador '(x)' en el sentido 'cualquiera que sea', o 'todo objeto x es tal que', pero a un esquema no podemos aplicarle un cuantificador '(p)' en un sentido análogo. Es incurrir en confusión considerar que '(p)' puede tener el sentido de 'todo enunciado p es tal que'; por lo tanto, '(p)' sería análogo, no al sentido propio de '(x)' —'todo objeto x es tal que'— sino al sentido diferente 'todo nombre x es tal que'.

La analogía parcial que acabamos de señalar entre esquemas y matrices es cierta: el esquema se convierte en enunciado sustituyendo las letras por enunciados, mientras que la matriz se convierte en enunciado sustituyendo las letras por los nombres. Podemos considerar, por esto, que la matriz comparte el carácter de diagrama que le hemos atribuído al esquema. Pero la matriz tiene, además, la capacidad de formar parte de un enunciado en el que figuran cuantificadores, aun cuando el esquema no tenga esta propiedad.

Otro punto más sutil que debemos señalar es que no podemos decir, en general, que un cuantificativo que comienza con '(x)' sea verdadero siempre que la matriz que le sigue sea verdadera para cualquier sustitución de 'x' por nombres. Esto resulta del hecho de que hay objetos sin nombre. Se sabe, por ejemplo, que dada una notación cualquiera hay ciertos números reales que no admiten nombre alguno, ni simple ni de la forma de una descripción compleja, dentro de la notación dada. Por esto, puede ocurrir que un cuantifi-

cativo '(x) ...', esto es, 'Todo objeto x es tal que ...' sea falso aun cuando toda sustitución de 'x' por nombres haga verdadera a la matriz. Este punto sirve para destacar el hecho de que el uso de cuantificadores es un método para discurrir sobre objetos en general, sean concretos o abstractos, y no un método para discurrir sobre meros resultados de la sustitución de letras por nombres o por enunciados.

§ 18. *Ejemplo complejo de traducción*

Lo que hemos dicho acerca de la traducción de enunciados del lenguaje diario a signos lógicos (§§ 9-10) sigue valiendo cuando es preciso considerar, además de estructuras composicionales, estructuras cuantificacionales. Pero en tal caso la traducción se hace una empresa más complicada. El desarrollo de un ejemplo de orden bastante complicado bastará, tal vez, para aclarar el caso general. Consideremos el enunciado

(1) Mientras un vendedor de radios no haya vendido una radio a un hombre a quien no le gustan las radios, no domina su profesión.

La referencia al tiempo figura en este ejemplo de una manera importante, por lo cual es preciso hacerla explícita.

(2) Todo instante en que un vendedor de radios ya domina su profesión es posterior a un período durante el cual le vende una radio a un hombre a quien no le gustan las radios al comienzo del período.

Aplicando el principio de la traducción centrípeta, buscamos la estructura más exterior de (2). Tal vez sea 'todo vendedor de radios es tal que ...', esto es, '$(x) \sim$ (x es vendedor de radios . $\sim$ ...)'. En tal supuesto, (2) se convierte en

(3) $(x) \sim$ (x es vendedor de radios . $\sim$ todo instante en

que x domina su profesión es posterior a un período durante el cual x le vende una radio a un hombre a quien no le gustan las radios al comienzo del período).

La cláusula 'todo ... del período', que está dentro de (3), tiene la estructura 'todo instante en que ... es tal que ...'; vale decir, es '$(y) \sim (y$ es instante . en y .... $\sim$ ...)'. Por consiguiente, (3) se convierte en

(4) $(x) \sim (x$ es vendedor de radios . $\sim (y) \sim (y$ es instante. x domina su profesión en y . $\sim y$ es posterior a un período durante el cual x le vende una radio a un hombre a quien no le gustan las radios al comienzo del período)).

La cláusula 'y es posterior ... del período' tiene la forma 'algún período es tal que ...', esto es, '$\sim (z) \sim (z$ es período. ...)'. Con esto, (4) se convierte en

(5) $(x) \sim (x$ es vendedor de radios . $\sim (y) \sim (y$ es instante . x domina su profesión en y . $(z) \sim (z$ es período . y es posterior a z . x vende una radio durante z a un hombre a quien no le gustan las radios al comienzo de $z)))$

La cláusula 'x vende ... de z' tiene la forma 'alguna radio es tal que ...', de manera que (5) se transforma en

(6) $(x) \sim (x$ es vendedor de radios . $\sim (y) \sim (y$ es instante . x domina su profesión en y . $(z) \sim (z$ es período . y es posterior a z . $\sim (w) \sim (w$ es radio . x vende w durante z a un hombre a quien no le gustan las radios al comienzo de $z))))$.

La cláusula 'x vende w ... de z' es de la forma 'algún hombre es tal que ...', de modo que (6) se convierte en

(7) $(x) \sim (x$ es vendedor de radios . $\sim (y) \sim (y$ es instante . x domina su profesión en y . $(z) \sim (z$ es período . y es posterior a z . $\sim (w) \sim (w$ es radio . $\sim (v)$

$\sim$ (v es hombre . x vende w a v durante z . $\sim$ a v le gustan las radios al comienzo de z))))) .

El punto al que queramos llevar esta clase de análisis dependerá, por supuesto, de nuestros propósitos. Generalmente, la cuestión es revelar una parte de la estructura cuantificacional o composicional suficiente para poder demostrar que el enunciado dado es lógicamente verdadero (propiedad de que carece el ejemplo (7)), o bien que está relacionado con otros enunciados dados por implicación o equivalencia lógica.

La elección de la estructura más exterior en cada paso es, hasta cierto punto, arbitraria. Tal era la situación en los tres últimos pasos del ejemplo que acabamos de ver. En (4), la cláusula 'y es posterior . . . del período' puede considerarse que tiene la estructura 'alguna radio es tal que . . .', o igualmente 'algún hombre es tal que . . .', y sólo más tarde la estructura 'algún período es tal que ...'. Los resultados de estas distintas formas de análisis serán equivalentes a (7), aunque diferentes de él. Sin embargo, ciertas elecciones serían incorrectas. Por ejemplo, no podemos analizar (2) en la forma

(x) $\sim$ (x es instante . en x un vendedor está . . . . $\sim$ x es posterior a un período durante el cual él . . .),

aislando a 'él' de su antecedente 'un vendedor'. La cuantificación en relación a 'vendedor' debe abarcar un trecho lo suficientemente amplio para que incluya ambos referentes.

§ 19. *Cuantificación vacía*

Cuando hablamos de la cuantificación de una matriz, en general no debemos suponer que el pronombre de la cuantificación sea un pronombre libre de la matriz. Cualquier matriz que carezca de 'x', tal como por ejemplo 'Sócrates es mortal', puede imaginarse en forma tal que contenga a 'x' en forma vacía, a saber,

(1) Sócrates es mortal . $x = x$.

El cuantificativo:

(2) (x) Sócrates es mortal,

esto es,

(3) (x)(Sócrates es mortal . $x = x$) ,

será verdadero o falso según que 'Sócrates es mortal' sea verdadero o falso; pues siendo '$x = x$' cumplido por todo objeto x, el conjuntivo (1) como totalidad será satisfecho por todo objeto x o por ninguno, según que su otro componente sea verdadero o falso. Por consiguiente, en general, cuando 'x' no figura como pronombre libre en una matriz dada, el resultado de la aplicación del cuantificador '(x)' a la matriz puede tratárselo como a la propia matriz, con lo cual el cuantificador se torna vacío. Inclusive es conveniente suprimir el cuantificador, considerando a la matriz como su propio cuantificativo en relación con 'x' .

Anteriormente hemos simplificado la técnica de la teoría de la composición a costa de cierta complicación de la "gramática" de los tildes y los paréntesis, decretando que el uso de '$\sim\sim$' y del paréntesis en las conjunciones iteradas no es gramatical. Ahora, análogamente, podemos simplificar la técnica de la teoría de la cuantificación a costa de cierta complicación de la gramática cuantificacional, decretando que toda expresión del tipo (2) no es gramatical; esto es, decretando no gramatical todo uso del cuantificador como prefijo de una matriz en la que el pronombre en cuestión no es libre.

La complicación que sufrió la gramática de los tildes y de los paréntesis se debió a que la notación de la negación dejó de consistir, en todos los casos, en la aplicación de un tilde para convertirse, en el caso de la negación, en la operación de borrar el tilde. Ahora, la complicación que sufrirá la gramática del cuantificador es que la notación de la cuantificación dejará de consistir en todos los casos en el aditamento del cuantificador al comienzo de la expresión. Para cuantificar una matriz que contiene al pronombre del cuantificador como pronombre libre, agregamos al comienzo el cuantificador; pero

para cuantificar una matriz que no contiene al pronombre del cuantificador como pronombre libre, dejamos la matriz tal como estaba, sin agregarle el cuantificador.

§ 20. *Verdad y validez cuantificacionales*

La *verdad cuantificacional* es una especie de verdad lógica más amplia que la verdad composicional. Un enunciado es cuantificacionalmente verdadero cuando está construído por medio de conjunciones, negaciones y cuantificaciones, de manera tal que se conserva verdadero cualquiera fuere el cambio que sufran los demás ingredientes. En una palabra, un enunciado es cuantificacionalmente verdadero cuando en él figuran esencialmente sólo las notaciones composicionales y cuantificacionales. Por ejemplo, la proposición

> Si un objeto tiene influencia sobre todo objeto, entonces tiene influencia sobre sí mismo,

esto es,

> $(y) \sim$ (y tiene influencia sobre todo objeto . $\sim y$ tiene influencia sobre y),

o sea,

(1) $(y) \sim ((x)$ y tiene influencia sobre x . $\sim y$ tiene influencia sobre y),

es cuantificacionalmente verdadero, ya que la locución compleja 'tiene influencia sobre' es susceptible de una sustitución cualquiera sin que se produzca un enunciado falso.

Una generalización de la noción de verdad cuantificacional, útil para el desarrollo sistemático de las verdades cuantificacionales, es la noción de *validez cuantificacional*. Llamaré *cuantificacionalmente válida*, o simplemente (en este capítulo) *válida* a toda matriz cuantificacionalmente verdadera, o que puede convertirse en cuantificacionalmente verdadera al aplicársele cuantificadores inicialmente.

Así, por ejemplo, la matriz (1) es válida por ser un enunciado cuantificacionalmente verdadero. También es válida la matriz

(2) $\sim$ ((*x*) *y* tiene influencia sobre *x* . $\sim$ *y* tiene influencia sobre *y*),

ya que la aplicación de '(*y*)' la convierte en la verdad cuantificacional (1). Obsérvese que la matriz (2) es válida sin ser verdadera ni falsa, ya que no es un enunciado. Las matrices válidas son, pues, más amplias que las verdades cuantificacionales; éstas son, simplemente, aquellas matrices válidas que constituyen enunciados, vale decir, que no tiene pronombres libres.

Toda matriz de la forma

(A) $\sim ((x)\, fx \,.\, \sim fy)$

es válida, siendo '*fx*' sustituíble por cualquier matriz y '*fy*' por una matriz que difiera de ella únicamente por poseer '*y*' como pronombre libre en todos los lugares en que aquella matriz posee '*x*' como pronombre libre. La matriz (2) es una de las matrices válidas de la forma (A); otra es

(3) $\sim$ ((*x*) *z* tiene influencia sobre *x* . $\sim$ *z* tiene influencia sobre *y*) .

Mientras que la aplicación del cuantificador '(*y*)' basta para transformar la matriz (2) en una verdad lógica, para convertir la matriz (3) en una verdad lógica es preciso aplicarle sucesivamente dos cuantificadores, '(*y*)' y '(*z*)':

(4) (*y*) (*z*) $\sim$ ((*x*) *z* tiene influencia sobre *x* . $\sim$ *z* tiene influencia sobre *y*) .

Otras matrices válidas de la forma (A) pueden necesitar más de dos cuantificadores iniciales para convertirse en verdades lógicas. Por ejemplo, la matriz

(5) $\sim ((x)\, x^z > w \,.\, \sim y^z > w)$

necesita los cuantificadores '(y)', '(z)', '(w)' para convertirse en verdad lógica:

(6) $$(y)\ (z)\ (w) \sim ((x)\ x^z > w\ .\ \sim y^z > w).$$

Pero todas las matrices de la forma (A) son igualmente válidas, independientemente del número de pronombres libres que contengan, ya que todos los enunciados de los tipos de (1), (4) y (6) son, obviamente, verdades lógicas.

Naturalmente, hay una variedad ilimitada de otras formas de matrices válidas, fuera de (A). El estudio sistemático de estas formas es una tarea central de la teoría de la cuantificación. Las matrices válidas de la forma especial (A) (y también las que usan otros pronombres en lugar de 'x' e 'y') constituyen un punto de partida conveniente para la deducción en serie de otras matrices válidas. El propósito de semejante deducción de matrices válidas es la obtención de verdades cuantificacionales, siendo éstas las matrices válidas sin pronombres libres. Sucede que es más fácil deducir matrices válidas en general que derivar exclusivamente las que carecen de pronombres libres.

Antes de proseguir, debemos reflexionar sobre el uso de los ideogramas 'fx' y 'fy' que figuran en (A), y que constituye un suplemento del uso esquemático de 'p', 'q', etc. Está claro que la matriz que imaginamos ocupando el lugar de 'fx' no contiene necesariamente 'x' como pronombre libre. Cuando no lo contiene, en lugar de '$(x)\ fx$' debemos pensar la misma matriz sin el prefijo adicional '(x)' (cf. § 19). En una palabra, '$(x)\ fx$' representa siempre el cuantificativo de la expresión representada por 'fx', pero no siempre una expresión que comienza con '(x)' . Es una situación análoga a la de '$\sim p$', que siempre representa la negación de lo expresado por 'p', pero no siempre representa una expresión que comienza con '$\sim$' (puesto que la negación puede consistir en borrar el tilde anterior).

§ 21. *La implicación composicional como instrumento de demostración.*

La noción de verdad composicional se generaliza fácilmente a la de *validez composicional* de matrices, análoga a la noción de validez cuantificacional. Así como el enunciado

$$\sim \text{(Juan vendrá . José vendrá . } \sim \text{ Juan vendrá)}$$

es composicionalmente verdadero, la matriz

$$\sim \text{(x vendrá . y vendrá . } \sim x \text{ vendrá)}$$

puede llamarse composicionalmente válida. La definición es la siguiente: una matriz es *composicionalmente válida* cuando está constituída por sus componentes simples (en el sentido de 'simple' que se emplea en la teoría de la composición; cf. § 11) del mismo modo en que un enunciado composicionalmente verdadero está constituído por sus componentes simples. Esto es, una matriz se llama composicionalmente válida si todo resultado de la sustitución de sus componentes simples por enunciados es composicionalmente verdadero.

La implicación y la equivalencia composicional pueden generalizarse de la misma manera en relación con las matrices en general. De tal modo, sobre la base de la validez composicional podemos definir estas relaciones generalizadas análogamente a la manera en que habíamos formulado la implicación y la equivalencia composicionales sobre la base de la verdad composicional. Una matriz *implica composicionalmente* otra matriz si el condicional formado por ambas es composicionalmente válido; y la *equivalencia composicional* de matrices es su implicación recíproca. Así, por ejemplo, la matriz 'x vendrá . y vendrá' implica composicionalmenre la matriz 'x vendrá' y es composicionalmente equivalente a la matriz 'y vendrá . x vendrá'.

Es claro que en la práctica no sustituímos matrices componentes por enunciados para determinar la validez, la implicación o la equivalencia de matrices. Podemos usar la técnica de las tablas, aplicándola directamente a las matrices y a sus componentes como si

fueran enunciados. Por ejemplo, la determinación por tablas de que el enunciado 'Juan vendrá . José vendrá' implica 'Juan vendrá', se haría mecánicamente de la misma manera si, en lugar de 'Juan vendrá' y 'José vendrá' tuviésemos 'x vendrá' e 'y vendrá'. No obstante, al aplicar la técnica de las tablas directamente a las matrices debemos reconocer que estamos utilizando un método mecánico de cálculo, y que las letras 'V' y 'F' de las tablas dejan de significar directamente los valores de los componentes y compuestos, ya que en general las matrices carecen de valor. Lo que indican las letras 'V' y 'F' en este caso no son los valores de las matrices sino los de los enunciados que las sustituyen.

La palabra 'válido' a secas, se entenderá en este capítulo en el sentido de validez cuantificacional. La validez composicional es, evidentemente, una especie de la validez cuantificacional. Y, por otra parte, una especie a la que nos referiremos raramente. Usaremos con mayor frecuencia las nociones de implicación y equivalencia composicionales entre matrices.

La implicación composicional entre matrices constituye un instrumento para la demostración de la validez de nuevas matrices sobre la base de matrices válidas dadas; pues es notorio que toda matriz implicada composicionalmente por una matriz válida, o por una conjunción de matrices válidas, debe ser válida.

Es así como podemos demostrar, por ejemplo, sobre la base de las matrices válidas de la forma (A), la validez (cuantificacional) de toda matriz de la forma

(B) $\sim ((x)\, fx \,.\, (x) \sim fx)$.

Imaginando que la expresión esquemática 'fx' es sustituída por una matriz cualquiera, mediante la Tabla 8 verificamos que '$\sim ((x)\, fx \,.\, (x) \sim fx)$' está implicada composicionalmente por la conjunción de dos matrices válidas de la forma (A), a saber, '$\sim ((x)\, fx \,.\, \sim fy)$ y '$\sim ((x) \sim fx \,.\, fy)$'.

De la validez de las matrices de la forma (B) se deduce, por ejemplo, que los enunciados

(1) No es que todo y a la vez nada sea perecedero,

(2) Si todo es perecedero, entonces algún objeto es perecedero

son cuantificacionalmente verdaderos, pues ambos se traducen indistintamente por

$$\sim ((x)\ x \text{ es perecedero} \ .\ (x) \sim x \text{ es perecedero}),$$

que tiene la forma (B) y es por lo tanto válido, o sea, cuantificacionalmente verdadero (por ser un enunciado).

$(x)\,fx$	$(x) \sim fx$	fy	$\sim ((x)\,fx\,.\sim fy)\ .\sim ((x) \sim fx.\,fy)$	$\sim ((x)\,fx\ .\ (x) \approx fx)$
V	V	V	F	F
F	V	V	—	V
V	F	V	—	V
F	F	V	—	V
V	V	F	F	F
F	V	F	—	V
V	F	F	—	V
F	F	F	—	V

Tabla 8

§ 22. *Otras reglas de demostración*

En la equivalencia composicional entre matrices tenemos una segunda relación mediante la cual se puede deducir nuevas matrices válidas sobre la base de matrices válidas dadas; pues, cuando sustituímos cualquier parte de una matriz dada por otra matriz composicionalmente equivalente a esa parte, el resultado debe seguir siendo válido. Por ejemplo, si una matriz válida tiene una parte de la forma '$p\ .\ q$', el cambio de esta parte por '$q\ .\ p$' no perjudica la validez del contexto.

Afirmar que todo objeto cumple al mismo tiempo dos condiciones dadas es afirmar que todo objeto cumple la primera condición

y, también, que todo objeto cumple la segunda. En general, las formas '$(x)\ (fx\ .\ gx)$' y '$(x)\ fx\ .\ (x)\ gx$' son intercambiables. Semejante sustitución de '$(x)\ (fx\ .\ gx)$' por '$(x)\ fx\ .\ (x)\ gx$' o viceversa, dentro de cualquier matriz válida, conservará, claro está, la validez; y así tenemos un tercer método para deducir nuevas matrices válidas sobre la base de matrices válidas dadas. (En lugar del 'x' del ejemplo podrá aparecer, por supuesto, cualquier otro pronombre.)

Un ejemplo del uso de las tres reglas de demostración que hemos considerado hasta ahora consiste en la demostración de que toda matriz de la forma

(C) $\sim ((x) \sim (fx\ .\ \sim gx)\ .\ (x)\ fx\ .\ \sim (x)\ gx)$

es válida. Imaginando que 'fx' y 'gx' son sustituídas por matrices cualesquiera, observamos que la matriz

(1) $\sim ((x)\ fx\ .\ (x)\ gx\ .\ \sim (x)\ gx)$,

por ser composicionalmente válida, está implicada composicionalmente por matrices de la forma (A) o de cualquier otra forma; pues en la construcción de una tabla no encontramos ningún 'F' en la columna correspondiente a (1). Por lo tanto, (1) queda "demostrada" según la primera de nuestras reglas de demostración. (Lo mismo vale para cualquier matriz composicionalmente válida.) Ahora le aplicamos a (1) nuestra tercera regla, la que trata de la distribución de cuantificadores, y concluímos que la matriz

(2) $\sim ((x)\ (fx\ .\ gx)\ .\ \sim (x)\ gx)$

es válida. En seguida observamos, haciendo uso de tablas, que '$fx\ .\ gx$' y '$\sim (fx\ .\ \sim gx)\ .\ fx$' son composicionalmente equivalentes; y así concluímos de (2) que

(3) $\sim ((x)\ (\sim (fx\ .\ \sim gx)\ .\ fx)\ .\ \sim (x)\ gx)$

es válida, según nuestra segunda regla. Finalmente, el paso de (3) a (C) consiste en el uso de la tercera regla.

De la validez de las matrices de la forma (C) se sigue que los enunciados

(4) Si todo objeto creado es perecedero, y todo objeto fue creado, entonces todo es perecedero.

(5) Si ningún espíritu es perecedero, y todo es espíritu, entonces nada es perecedero.

(6) Si todo es o materia o espíritu, y nada es materia, entonces todo es espíritu.

(7) Si sólo los espíritus fueron creados, y no hay espíritus, entonces nada fue creado,

son cuantificacionalmente verdaderos, puesto que se traducen respectivamente por

(8) $\sim ((x) \sim (x$ es creado $. \sim x$ es perecedero$) . (x)\, x$ es creado $. \sim (x)\, x$ es perecedero$)$,

(9) $\sim ((x) \sim (x$ es espíritu $. x$ es perecedero$) . (x)\, x$ es espíritu $. \sim (x) \sim x$ es perecedero$)$,

(10) $\sim ((x) \sim (\sim x$ es materia $. \sim x$ es espíritu$) . (x) \sim x$ materia $. \sim (x)\, x$ es espíritu$)$,

(11) $\sim ((x) \sim (\sim x$ es espíritu $. x$ es creado$) . (x) \sim x$ es espíritu $. \sim (x) \sim x$ es creado$)$.

Se sigue, igualmente, que los enunciados

(12) Si todo fue creado y no todo es perecedero, entonces algún objeto creado no es perecedero,

(13) Si todo objeto creado es perecedero, y algún objeto no es perecedero, entonces algún objeto no fue creado

son cuantificacionalmente verdaderos, ya que también se traducen por (8) si dejamos de lado la cuestión del orden de los tres componentes de la conjunción. En forma análoga se pueden construir variantes de (9)-(11).

Tenemos que presentar otra regla de demostración. Esta regla se basa sobre el hecho de que el resultado de la cuantificación de cualquier matriz válida, en relación con cualquier pronombre, será

una matriz válida. Consideremos, por ejemplo, una matriz cuyos pronombres libres son 'x', 'y' y 'z'. El resultado de su cuantificación en relación con cualquier pronombre no libre en ella, por ejemplo 'w', es la propia matriz válida sin alteración (cf. § 19). El resultado de su cuantificación con respecto a cualquiera de sus pronombres libres, por ejemplo 'z', es la matriz formada por la matriz originaria con el agregado de '(z)' al comienzo. La matriz formada de esta manera es válida por la misma razón que la matriz originaria, pues ambas son capaces de convertirse en un cuantificativo de la forma '$(x)\ (y)\ (z)\ fxyz$' por la aplicación de cuantificadores.

Una de las demostraciones que se efectúan con la ayuda de esta cuarta regla es la demostración de que toda matriz de la forma

(D) $\sim (\sim(x) \sim (fx\ .\ gx)\ .\ (x) \sim fx)$

es válida. Imaginando matrices en las posiciones de las expresiones esquemáticas 'fx' y 'gx', comencemos la deducción de (D), como anteriormente la de (C), introduciendo una matriz composicionalmente válida:

$$\sim (\sim fx\ .\ fx\ .\ gx)$$

De ella, por medio de nuestra nueva regla, obtenemos

(14) $(x) \sim (\sim fx\ .\ fx\ .\ gx)$.

Pero, por (C), sabemos también que la matriz

(15) $\sim ((x) \sim (\sim fx\ .\ fx\ .\ gx)\ .\ (x) \sim fx\ .\ \sim (x) \sim (fx\ .\ gx))$

es válida. La conjunción de (14) y (15) implica composicionalmente (D).

De la validez de las matrices de la forma (D) se sigue, por ejemplo, que las proposiciones

(16) Si algunos peces vuelan, hay peces,

(17) Si no sólo los pájaros vuelan, no todo es pájaro

son cuantificacionalmente verdaderas, puesto que se traducen por

(18) $\sim (\sim (x) \sim (x$ es pez . x vuela) . $(x) \sim x$ es pez) ,

(19) $\sim (\sim (x) \sim (\sim x$ es pájaro . x vuela) . (x) x es pájaro) .

Del mismo modo en cuanto a las variantes de (18) y (19), a saber,

(20) Si no hay peces, ningún pez vuela,

(21) Si todo es pájaro, sólo los pájaros vuelan.

§ 23. *Observaciones generales sobre la técnica de la demostración*

En resumen, nuestra técnica de demostración de la validez consiste en comenzar por las matrices de la forma (A), deduciendo otras matrices por el uso continuado de las cuatro operaciones siguientes:

(i) *inferencia de lo que está implicado composicionalmente*;

(ii) *intercambio de equivalentes composicionales*;

(iii) *intercambio de cláusulas de las formas* '(x) $(fx$. $gx)$' y '(x) fx . (x) gx';

(iv) *cuantificación*.

En el curso de tales demostraciones acumulamos un fondo de formas de matrices válidas que podemos emplear en las demostraciones ulteriores. Por ejemplo, ya hemos usado (C) de esta manera en el penúltimo paso de la demostración de (D). En lugar de esto podríamos incluir, en la demostración de (D), otros tres pasos para la deducción explícita del caso (15) de (C) sobre la base de (A); estos tres pasos son exactamente análogos a los pasos que condujeron originariamente a (C). Se ve, pues, que la referencia a (C) o a otros resultados intermedios, en el curso de la demostración de valideces ulteriores, no es sino un modo de evitar la duplicación del esfuerzo.

La técnica de demostración que hemos descripto determina una clase de matrices válidas que incluye las matrices de la forma (A) y todas las matrices que de ellas se infieren por el uso continuado de las cuatro operaciones (i)-(iv). Se sabe que esta clase agota las

matrices válidas. La demostración de este hecho se debe, esencialmente, a Gödel (1930). Su argumento, que es sutil y complicado, se aplica a una sistematización de la teoría de la cuantificación que difiere de la mía; pero sería fácil establecer la equivalencia de las dos sistematizaciones.

La definición de verdad cuantificacional se basaba en la noción general de verdad. Una verdad cuantificacional es un enunciado en que figuran esencialmente sólo las notaciones de la conjunción, de la negación y de la cuantificación; y la noción de "figurar esencialmente" se funda, a su vez, en la noción general de verdad. Pero ahora tenemos una formulación equivalente de verdad cuantificacional, que no hace uso de la noción general de verdad. A saber: *una verdad cuantificacional es un enunciado que se puede deducir de las matrices del tipo* (A) *por medio de las operaciones* (i)-(iv).

Además de esta ventaja teórica, la nueva formulación tiene el valor práctico de constituir una técnica para establecer cualquier verdad cuantificacional o, más generalmente, cualquier matriz válida. Obsérvese, sin embargo, que esta técnica de demostración es de un tipo menos satisfactorio que el tipo de técnica ilustrado por las tablas de valores de la teoría de la composición. Las tablas deciden mecánicamente si un enunciado cualquiera es composicionalmente verdadero o no. En cambio, para establecer que un enunciado dado es cuantificacionalmente verdadero, es preciso buscar su deducción sobre la base de (A) y (i)-(iv). Una vez descubierta, la deducción puede ser verificada por inspección mecánica; pero no basta fracasar en el intento de encontrar tal deducción para asegurar que no se la puede hallar. Lo que poseemos es, en suma, sólo un método mecánico de legitimar las demostraciones de la verdad cuantificacional y no un criterio mecánico de la propia verdad cuantificacional. Más aún, se sabe que semejante criterio es imposible. La demostración de este hecho se debe a Church (1936).

Cuando pasamos de la verdad cuantificacional a la verdad lógica o matemática en el sentido más amplio, resulta que incluso es imposible un método general de demostración legitimable mecáni-

camente; este es el resultado de Gödel mencionado en la Introducción (cf. también § 54).

§ 24. *Implicación cuantificacional*

Del mismo modo que un enunciado se dice que está *implicado composicionalmente* por otro cuando se deduce de este otro, tan sólo en virtud de las estructuras de ambos enunciados con respecto a la negación y a la conjunción, así también se lo puede denominar *implicado cuantificacionalmente* cuando se sigue de otro en virtud de las estructuras de los dos enunciados con relación a la conjunción, la negación y la cuantificación.

Así como la implicación composicional relaciona enunciados cuyo condicional es composicionalmente verdadero, la implicación cuantificacional relaciona enunciados cuyo condicional es cuantificacionalmente verdadero. La verdad cuantificacional del (2) del § 21, por ejemplo, significa que el enunciado 'Todo es perecedero' implica cuantificacionalmente el enunciado 'Algún objeto es perecedero'. A cada uno de los ejemplos (4)-(7), (12), (13), (16), (17), (20) y (21) (§ 22) de verdad cuantificacional le corresponde un ejemplo de implicación cuantificacional.

Habíamos hallado conveniente tratar la implicación composicional como relación, no solamente entre enunciados sino, en general, entre matrices. La situación es la misma en lo que respecta a la implicación cuantificacional, y la formulación de ésta se hace de manera análoga: una matriz implica cuantificacionalmente otra matriz cuando el condicional formado por ambas matrices es (cuantificacionalmente) válido. Así, por ejemplo, la validez de la matriz condicional (2) del § 20 significa que la matriz 'y tiene influencia sobre todo objeto' implica la matriz 'y tiene influencia sobre y', aún cuando las matrices no sean enunciados.

Del mismo modo, más generalmente, la implicación cuantificacional liga cada par de matrices de la forma

(1) $\qquad (x)\, fx, \qquad fy,$

dada la validez de toda matriz de la forma 'Si $(x)\,fx$, entonces fy', esto es, de la forma (A). Del mismo modo, de acuerdo con (B)-(D)[8], observamos que la implicación cuantificacional vincula todo par de matrices de cualquiera de las tres formas siguientes:

(2) $\quad (x)\,fx, \qquad \sim (x) \sim fx$

(3) $\quad (x) \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, (x)\,fx, \qquad (x)\,gx$

(4) $\quad \sim (x) \sim (fx \,.\, gx), \qquad \sim (x) \sim fx,$

sin contar con que sean enunciados o no.

Las formas de validez (A)-(D) dan lugar a otras formas de implicación además de (1)-(4). La forma (C), por ejemplo, no sólo es el condicional de antecedente '$(x) \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, (x)\,fx$' y consecuente '$(x)\,gx$', sino también el condicional de antecedente '$(x) \sim (fx \,.\, \sim gx)$' y consecuente '$\sim ((x)\,fx \,.\, \sim (x)\,gx)$' de manera que la validez de las matrices de la forma (C) significa que la implicación cuantificacional vincula no sólo cada par de la forma (3), sino también cada par de la forma

(5) $\quad (x) \sim (fx \,.\, \sim gx), \qquad \sim ((x)\,fx \,.\, \sim (x)\,gx),$

esto es,

(x) (si fx entonces gx), $\qquad$ si $(x)\,fx$, entonces $(x)\,gx$

Por ejemplo, 'Todo objeto creado es perecedero' implica cuantificacionalmente 'Si todo objeto fue creado, entonces todo objeto es perecedero'.

Pero (C) es igualmente el condicional de antecedente '$(x) \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, \sim (x)\,gx$' y consecuente '$\sim (x)\,fx$' (si cambiamos o desechamos el orden de la conjunción).

También es el condicional de antecedente '$(x)\,fx \,.\, \sim (x)\,gx$' y consecuente '$\sim (x) \sim (fx \,.\, \sim gx)$'; igualmente, el condicional de antecedente '$\sim (x)\,gx$' y consecuente '$\sim ((x) \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, (x)\,fx)$'; y lo mismo ocurre, finalmente, con el condicional de antecedente '$(x)\,fx$' y consecuente '$\sim ((x) \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, \sim (x)\,gx)$'. Tene-

[8] Los principios (A)-(D) y otros se reúnen, para comodidad del lector, al final del libro.

mos así otras cuatro formas de implicación además de (3) y (5), y también sobre la base de (C). De la misma manera, sobre la base de (A), (B) y (D) obtenemos otras tres formas de implicación:

$$\sim fy, \qquad \sim (x)\, fx$$
$$(x) \sim fx, \qquad \sim (x)\, fx$$
$$(x) \sim fx, \qquad (x) \sim (fx \,.\, gx)$$

§ 25. *Equivalencia cuantificacional*

A pesar de que la implicación cuantificacional desempeña el papel principal en las aplicaciones de la lógica (cf. Introducción), no requiere ninguna técnica suplementaria. Cada caso de implicación cuantificacional consiste en la validez de un condicional, y por consiguiente puede demostrarse por medio de la técnica completa para la demostración de la validez. Lo mismo se da para la *equivalencia cuantificacional* cuando la definimos como implicación cuantificacional recíproca; pues cada demostración de equivalencia cuantificacional consiste en la demostración de dos implicaciones, esto es, en la demostración de la validez de dos condicionales.

Por ejemplo, dos matrices cualesquiera de la forma

(1) $\sim (p \,.\, \sim (x)\, fx), \qquad (x) \sim (p \,.\, \sim fx)$

son cuantificacionalmente equivalentes, sustituyéndose 'fx' por cualquier matriz, y 'p' por cualquier matriz en la que 'x' no es libre. Para establecer este hecho tenemos que demostrar la validez de todas las matrices condicionales de las dos formas

(E) $\sim (\sim (p \,.\, \sim (x)\, fx) \,.\, \sim (x) \sim (p \,.\, \sim fx))$,

(E') $\sim ((x) \sim (p \,.\, \sim fx) \,.\, p \,.\, \sim (x)\, fx)$.

Pero esta segunda forma está abarcada directamente por (C). Para establecer (E) observamos que las dos formas

(2) $\sim (\sim (x) \sim (\sim fx \,.\, p) \,.\, (x)\, fx)$,

(3) $\sim (\sim (x) \sim (p \,.\, \sim fx) \,.\, \sim p)$

caben en (D); obtenemos

(4) $\sim (\sim (x) \sim (p \,.\, \sim fx) \,.\, (x)\, fx)$

de (2) por (ii); y finalmente obtenemos (E) de (3) y (4) por (i).

La equivalencia establecida muestra que el tipo de condicional

Si p entonces, cualquiera que sea x, fx

es intercambiable con el cuantificativo

Cualquiera que sea x, si p luego fx,

donde 'x' no es libre en el antecedente.

Ya se nos apareció anteriormente otro ejemplo de equivalencia cuantificacional en la pareja

$$(x)\,(fx \,.\, gx), \qquad (x)\, fx \,.\, (x)\, gx \,.$$

Fue por esto que adoptamos la operación deductiva (iii). Sobre la base de (1) puede convenir adoptar una quinta operación deductiva análoga:

(v) *intercambio de las cláusulas de las formas* '$\sim (p \,.\, \sim (x)\, fx)$' y '$(x) \sim (p \,.\, \sim fx)$'.

Pero esta operación adicional es sólo conveniente, no es imprescindible. Es posible demostrar[9] que, cuando hemos llegado a establecer una equivalencia cuantificacional sobre la base de (A) y (i)-(iv), toda demostración por intercambio de esas equivalencias puede cumplirse sobre la base de (A) y (i)-(iv).

Para ilustrar la aplicación de (v) consideremos el enunciado complejo (7) del § 18; observemos que contiene tres partes de la forma '$\sim (p \,.\, \sim (x)\, fx)$', y que la transformación de estas partes en '$(x) \sim (p \,.\, \sim fx)$' sirve para reducir (7) a este otro enunciado más simple:

$(x)\,(y) \sim$ (x es vendedor de radios . y es momento . x domina

[9] Con un argumento parecido al que se encuentra en mi *Mathematical Logic*, § 18.

su profesión en y . (z) (w) (v) $\sim$ (z es período . y es posterior a z . w es radio . v es hombre . x vende w a v durante z . $\sim$ a v le gustan las radios al comienzo de z)) .

§ 26. *Cambios de letras. Conmutación de cuantificadores*

Un ejemplo de una forma conveniente de escribir las demostraciones de validez es el siguiente. Las letras 'a', 'b', 'F', etc., que aparecen dentro de las fórmulas, sirven de abreviaturas de las fórmulas designadas en el margen izquierdo por '(a)', '(b)', '(F)', etc.

(F) $\sim ((x)\ (y)\ fxy\ .\ \sim (y)\ (x)\ fxy)$.

Demostración:

(a)	$\sim ((y)\ fxy\ .\ \sim fxy)$	(A)
(b)	$\sim ((x)\ \mathrm{a}\ .\ \sim \mathrm{c})$	(C)
(c)	$\sim ((x)\ (y)\ fxy\ .\ \sim (x)\ fxy)$	De (a) y (b) por (i) y (iv) .
(d)	$\sim ((y)\ \mathrm{c}\ .\ \sim \mathrm{F})$	(C)
(F)	De (c) y (d) por (i) y (iv) .	

La deducción de (c) consiste en que (iv) conduce de (a) a '(x) a', y en que la conjunción de éste con (b) implica composicionalmente (c). El último paso de la demostración es semejante.

Obsérvese que el último 'y' que figura en (a) es libre, ya que el cuantificador '(y)' solamente rige la primera cláusula '$(y)\ fxy$'. Podríamos usar 'z' en lugar del último 'y' de (a) y en los pasos ulteriores, sin por ello cambiar el significado del contexto. A través de una serie de pasos análogos a (a)-(d) podemos obtener la consiguiente variante de (F):

(1) $\sim ((x)\ (y)\ fxy\ .\ \sim (z)\ (x)\ fxz)$.

Además, podemos deducir la otra variante:

(2) $\sim ((x)\ (y)\ fxy\ .\ \sim (z)\ (w)\ fwz)$.

y esto de la siguiente manera:

(a) $\sim ((x)\, fxz \,.\, \sim fwz)$ (A)
(b) $\sim ((w)\, \mathrm{a} \,.\, \sim \mathrm{c})$ (C)
(c) $\sim ((x)\, fxz \,.\, \sim (w)\, fwz)$ De (a) y (b) por (i) y (iv).
(d) $\sim ((z)\, \mathrm{c} \,.\, \sim \mathrm{e})$ (C)
(e) $\sim ((z)\,(x)\, fxz \,.\, \sim (z)\,(w)\, fwz)$. De (c) y (d) por (i) y (iv).
(2) De (1) y (e) por (i) .

La única diferencia entre (F), (1) y (2) reside en las letras elegidas para desempeñar la función de pronombres. Es conveniente, pues, reconocer otra operación deductiva:

(vi) *variación alfabética de un pronombre.*

La regla sobre la variación alfabética de los pronombres puede formularse de la siguiente manera: *Si dos matrices sólo difieren en que la primera exhibe un cierto pronombre libre exactamente en los lugares en que la segunda exhibe otro pronombre libre, y si aplicamos a las respectivas matrices los cuantificadores que contienen los pronombres en cuestión, el resultado de la sustitución de uno de estos cuantificativos por otro, dentro de cualquier matriz válida, será válido.*

Pero (vi) es, como (v), teóricamente prescindible, ya que siempre puede ser sustituído por un argumento dentro de la teoría anterior, más o menos en la forma ilustrada en la demostración de (2) sobre la base de (1).

Una parte del contenido de esta regla de variación alfabética ya estaba implícita en nuestro modo de usar (A); pues entendíamos por matrices de la forma (A) no solamente a las matrices construídas por sustitución de 'fx' y 'fy' en el propio esquema (A), sino también matrices construídas por sustitución en las variantes

$$\sim ((x)\, fx \,.\, \sim fz), \qquad \sim ((y)\, fy \,.\, \sim fz)\,,$$

etc., de (A). Observamos la misma conducta con respecto a (B), (C), etc., sabiendo que las variantes de (B), (C), etc., obtenidas mediante la elección de letras diferentes, serían deducibles de las variantes correspondientes de (A). El único aspecto en que el uso explícito de (vi) es más eficaz que el uso implícito originario, es en

el cambio parcial de una letra, como cuando, al pasar de (F) a (1), cambiábamos la 'y' en el segundo cuantificativo pero no en el primero.

Pasemos ahora a fundar otra operación deductiva. La validez de las matrices de la forma (F) significa que cada matriz de la forma '$(x)\ (y)\ fxy$' implica cuantificacionalmente la correspondiente matriz de la forma '$(y)\ (x)\ fxy$'. Todo cuantificativo de un cuantificativo implica el resultado de la conmutación de los dos cuantificadores iniciales. De hecho, estamos frente a una equivalencia, puesto que la implicación inversa de '$(x)\ (y)\ fxy$' por '$(y)\ (x)\ fxy$' es simplemente otro caso del mismo principio de conmutación que acabamos de afirmar. En resumen, el orden de los cuantificadores adyacentes es indiferente. En la práctica puede convenir agregar a nuestra lista de operaciones ésta otra:

(vii) *conmutación de cuantificadores adyacentes*,

aun cuando el agregado de esta operación sea, como el de (v) y (vi), prescindible.

Tiene importacia señalar que el orden de los cuantificadores puede ser esencial cuando están separados por un tilde. Una matriz de la forma '$(x) \sim (y)\ fxy$' no es equivalente, en general, a la correspondiente matriz de la forma '$(y) \sim (x)\ fxy$'. Por ejemplo, dado que el (3) del § 19 es verdadero, el enunciado

$$(y) \sim (x)\ (y \text{ es hombre } .\ x = x)$$

es falso, mientras que

$$(x) \sim (y)\ (y \text{ es hombre } .\ x = x)$$

es verdadero.

Tampoco equivale, en general, una matriz de la forma '$(x) \sim (y)\ fxy$', a las matrices cualesquiera de las formas '$\sim (x) \sim (y) \sim fxy$', o '$\sim (y) \sim (x) \sim fxy$'. Por ejemplo, si se imagina que los únicos objetos que existen son los números enteros positivos, vemos que

$$(x) \sim (y)\ (x \text{ es divisible por } y)$$

es verdadero, significando que ningún número es divisible por todos los números; pero

$$\sim (x) \sim (y) \sim (x \text{ es divisible por } y)$$

es falso, pues significa que algún número no es divisible por ninguno; y también

$$\sim (y) \sim (x) \sim (x \text{ es divisible por } y)$$

es falso, y significa que algún número no es factor de ninguno.

Entre estas tres formas hay, sin embargo, una implicación: '$\sim (y) \sim (x) \sim fxy$' implica '$(x) \sim (y) fxy$'. Esto se establece en la siguiente demostración de validez:

(G) $\sim (\sim (y) \sim (x) \sim fxy \,.\, \sim (x) \sim (y) fxy)$.

Demostración:

(a)	$\sim ((y) fxy \,.\, \sim fxy)$	(A)
(b)	$\sim (\sim fxy \,.\, (y) fxy)$	De (a) por (ii) .
(c)	$\sim ((x) \text{b} \,.\, (x) \sim fxy \,.\, \sim (x) \sim (y) fxy)$	(C)
(d)	$\sim (\sim (x) \sim (y) fxy \,.\, (x) \sim fxy)$	De (b) y (c) por (i) y (iv).
(e)	$\sim (\sim (x) \sim (y) fxy \,.\, \sim (y) \sim (x) \sim fxy)$	De (d) por (iv) y (v).
(G)	De (e) por (i) .	

Lo que acabamos de establecer para (G) es que cualquier matriz del tipo;

Hay algún objeto y tal que no hay ningún objeto x tal que ...

implica la correspondiente matriz del tipo

No hay ningún objeto x tal que todo objeto y sea tal que...

Cuando sustituímos 'fxy' en (G) por una matriz negativa, los dos prefijos complejos '$\sim (y) \sim (x) \sim$' y '$(x) \sim (y)$' se convierten en '$\sim (y) \sim (x)$' y '$(x) \sim (y) \sim$' respectivamente. Se sigue, pues, que cualquier matriz del tipo

Hay algún objeto y tal que, cualquiera que sea x, ...

implica la correspondiente matriz del tipo

Cualquiera que sea x, hay un objeto y tal que. . .,

aun cuando en general la implicación inversa no valga.

§ 27. *El silogismo*

El tipo de raciocinio conocido desde Aristóteles con el nombre de *silogismo* puede ilustrarse con el siguiente argumento:

(1) Ningún β es γ y todo α es β; por lo tanto, ningún α es γ,

donde 'α', 'β' y 'γ' se sustituyen por términos cualesquiera, tales como 'filósofo', 'hombre', o 'infalible'. Este raciocinio depende del hecho de que la conjunción 'Ningún β es γ y todo α es β' implica 'Ningún α es γ'. Para establecer esta implicación dentro de la teoría de la cuantificación es preciso demostrar la validez del condicional correspondiente, que es

(2) Si ningún β es γ y todo α es β, entonces ningún α es γ.

Escribiendo 'fx', 'gx' y 'hx' en lugar de 'x es α', 'x es β' y 'x es γ' respectivamente, llegamos a la siguiente forma simbólica:

(H) $\sim ((x) \sim (gx \,.\, hx) \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, \sim (x) \sim (fx \,.\, hx))$.

Demostración:

(a) $\sim (\sim (gx \,.\, hx) \,.\, \sim (fx \,.\, \sim gx) \,.\, fx \,.\, hx)$ Por (i)

(b) $\sim ((x)\, a \,.\, \sim c)$ (C)

(c) $\sim ((x)\, (\sim (gx \,.\, hx) \,.\, \sim (fx \,.\, \sim gx)) \,.\, \sim (x) \sim (fx \,.\, hx))$ De (a) y (b) por (i) y (iv).

(H) De (c) por (iii).

(H) es una formulación no sólo del condicional (2) sino también al mismo tiempo, de una gran variedad de condicionales con otras formas verbales. La forma (2) es la versión que aparece cuando

consideramos la cláusula '$(x) \sim (fx \,.\, hx)$' en el papel de consecuente del condicional. Pero, cuando '$\sim (x) \sim (fx \,.\, \sim gx)$', o '$\sim (x) \sim (gx \,.\, hx)$' desempeñan este papel, (H) recibe respectivamente estas otras versiones:

(3) Si ningún β es γ y algún α es γ, entonces algún α no es β,
(4) Si todo α es β y algún α es γ, entonces algún β es γ.

Si le damos a 'hx' el sentido de 'x no es γ', en lugar de 'x es γ', luego de (2)-(4) obtenemos las siguientes versiones:

Si todo β es γ y todo α es β, entonces todo α es γ,
Si todo β es γ y algún α no es γ, entonces algún α no es β,
Si todo α es β y algún α no es γ, entonces algún β no es γ.

Dándole a 'gx' el sentido de 'x no es β', obtenemos más variantes; y dándole a 'fx' el sentido de 'x no es α' resultan aún más variantes. Vemos así que (1) es tan sólo una entre muchas formas de argumentos, bien diferentes en sus formulaciones verbales, pero todos ellos abarcados igualmente por (H). La teoría tradicional del silogismo distinguía, clasificaba, nombraba y estudiaba quince de estas formas.

Otras nueve formas a las que (H) no abarca, fueron también estudiadas con el nombre de silogismo. Una de ellas es ésta:

(5) Todo β es γ y todo β es α; por lo tanto, algún γ es α.

El condicional correspondiente a (5), escrito usando 'fx', 'gx' y 'hx', es

(6) $\sim ((x) \sim (gx \,.\, \sim hx) \,.\, (x) \sim (gx \,.\, \sim fx) \,.\, (x) \sim (fx \,.\, hx))$

Las ocho formas restantes son variantes de (5) también abarcadas por (6), así como las quince formas anteriores eran abarcadas por (H).

Sin embargo, los condicionales de la forma (6) no son, en general, cuantificacionalmente válidos. Es fácil deducir conclusiones falsas de premisas verdaderas conforme a (5). Por ejemplo, enten-

damos por 'α' 'cornudo', 'β' como 'unicornio' y 'γ' como 'hipomorfo'. El enunciado 'Todo β es γ', es decir, '$(x) \sim (x$ es β . $\sim x$ es $\gamma)$' es verdadero; pues, ya que el unicornio no existe, la conjunción 'x es β . $\sim x$ es γ' no es satisfecha por ningún objeto x. También el enunciado 'Todo β es α', resulta verdadero. No obstante, el enunciado 'Algún α es γ' es falso.

El argumento del tipo (5) es legítimo tan sólo con la hipótesis suplementaria 'Hay un β', hipótesis que falla en el caso 'Hay un unicornio'. El condicional cuya validez cuantificacional queremos establecer tiene por antecedente la conjunción triple 'todo β es γ, todo β es α, y hay un β'. Esto es, en realidad tenemos que demostrar, en lugar de (6),

(I) $\sim ((x) \sim (gx . \sim hx) . (x) \sim (gx . \sim fx) . \sim (x) \sim gx . (x) \sim (fx . hx))$.

Demostración:

(a) $\sim (\sim (gx . \sim hx) . \sim (gx . \sim fx) . \sim (fx . hx) . gx)$ Por (i)

(b) $\sim ((x)\, a . \sim c)$ (C)

(c) $\sim ((x) (\sim (gx . \sim hx) . \sim (gx . \sim fx) . \sim (fx . hx)) . \sim (x) \sim gx)$ De (a) y (b) por (i) y (iv)

(d) $\sim ((x) \sim (gx . \sim hx) . (x) \sim (gx . \sim fx) . (x) \sim (fx . hx) . \sim (x) \sim gx)$ De (c) por (iii) (dos veces)

(I) De (d) por (i).

§ 28. *Inferencias que incluyen nombres*

En la lógica tradicional era común tratar un enunciado del tipo 'Sócrates es hombre' como si tuviera la forma 'Todo α es β', y eventualmente con la formulación 'Todo lo que es idéntico a Sócrates es hombre'. Análogamente, 'Sócrates no es infalible' era tratado como si tuviera la forma 'Ningún α es γ'. El argumento

(7) Ningún hombre es infalible y Sócrates es hombre; por lo tanto, Sócrates no es infalible,

recibiría así la forma (1) del § 27. Pero sería igualmente posible tratar 'Sócrates es hombre' como ejemplo de 'Algún α es β', de la manera 'Algún objeto idéntico a Sócrates es hombre'; análogamente, podría tratarse 'Sócrates no es infalible' como si poseyera la forma 'Algún α no es γ'. Entonces (7) no recibiría la forma (1) sino una de las varias otras formas silogísticas.

Desde el punto de vista de la teoría de la cuantificación, ambos métodos de interpretación son artificiales. Las dos interpretaciones de 'Sócrates es hombre' se traducen en símbolos de las maneras siguientes:

(8) $(x) \sim (x =$ Sócrates $. \sim x$ es hombre),

(9) $\sim (x) \sim (x =$ Sócrates $. x$ es hombre).

Es evidente que 'Sócrates es hombre' se parece menos a (8) o a (9) que a la propia cláusula 'x es hombre', que forma parte de (8) y (9). Sería más natural considerar (7) en la forma

(10) Ningún β es γ e y es β; por lo tanto, y no es γ,

que en la forma (1). Interpretada de esta manera, la inferencia (7) se apoya sobre la implicación cuantificacional de la matriz 'y no es infalible' por la matriz 'Ningún hombre es infalible e y es hombre'. El condicional válido en cuestión puede escribirse, usando 'g' y 'h', de la manera siguiente:

(11) $\sim ((x) \sim (gx \,.\, hx) \,.\, gy \,.\, hy)$.

Pero éste no es sino un caso de (A).

Con la interpretación que acabamos de dar a 'gx' y 'hx', (11) corresponde a las palabras

(12) Si ningún hombre es infalible e y es hombre, entonces y no es infalible;

pero lo que necesitamos para establecer que el enunciado 'Ningún hombre es infalible y Sócrates es hombre' implica 'Sócrates no es infalible', es el condicional

(13) Si ningún hombre es infalible y Sócrates es hombre, entonces Sócrates no es infalible.

Sin embargo, la validez de (12) (o sea, de (11)) significa que el enunciado '(y) 12' es cuantificacionalmente verdadero; y el enunciado condicional (13) es, a su vez, uno de los casos que abarca ese condicional general '(y) 12'.

El procedimiento que acaba de ilustrarse es un método conveniente para la demostración de enunciados que contienen nombres —al estilo de (13)— sin tener que introducir la consideración de los nombres en la teoría de la cuantificación. La demostración, en dicha teoría, se efectúa usando un pronombre libre (en el último ejemplo, 'y') en lugar del nombre, y estableciendo en seguida la validez de una matriz (como (11) o (12)) en lugar de la verdad del enunciado propuesto (tal como (13)). El paso suplementario, que conduce al enunciado deseado (en nuestro ejemplo, el paso de '(y) 12' a (13)) consiste en el paso de un cuantificativo a uno de sus casos singulares. El principio que rige tal transición se llama *principio de aplicación*, y puede considerarse como exterior a la teoría pura de la cuantificación. Más adelante (§§ 39-41) surgirán ciertas cuestiones relacionadas con este principio.

§ 29. *Deducción sobre la base de premisas*

Consideremos las siguientes premisas:

(1) Toda persona que entra al edificio sin ser acompañada por un miembro de la firma es interrogada por el guardián.

(2) Algunos de los subalternos de Fiorecchio entraron al edificio sin ser acompañados por otra persona cualquiera.

(3) El guardián no interrogó a ningún subalterno de Fiorecchio.

y la conclusión

(4) Uno de los subalternos de Fiorecchio es miembro de la firma.

La traducción simbólica de estos enunciados, con 'fx', 'gxy', 'hx', 'jx' y 'kx' en lugar de 'x es una persona que entra al edificio', 'x acompaña a y', 'x es miembro de la firma', 'el guardián interroga a x' y 'x es subalterno de Fiorecchio', respectivamente es

(5) $(y) \sim ((x) \sim (hx \,.\, gxy) \,.\, fy \,.\, \sim jy)$,
(6) $\sim (y) \sim (fy \,.\, ky \,.\, (x) \sim (\sim kx \,.\, gxy))$,
(7) $(y) \sim (jy \,.\, ky)$,
(8) $\sim (x) \sim (hx \,.\, kx)$.

Tenemos que demostrar el condicional cuyo antecedente es la conjunción de (5)-(7) y cuyo consecuente es (8). Usando las cifras (5), '6', '7' y '8' como las abreviaturas respectivas de los enunciados (5), (6), (7) y (8), el condicional a demostrar es

(9) $\sim (5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, \sim 8)$.

Pero es fácil seguir un método diferente. En lugar de demostrar (9) fundándonos simplemente sobre la lógica, demostraremos (8) fundándonos en la lógica conjuntamente con las premisas (5)-(7).

Demostración:

(a) $\sim (7 \,.\, 5 \,.\, \sim b)$ (H)
(b) $(y) \sim ((x) \sim (hx \,.\, gxy) \,.\, fy \,.\, ky)$
De (7), (5) y (a) por (i).
(c) $(y) \sim (fy \,.\, ky \,.\, (x) \sim (hx \,.\, gxy))$
De (b) por (ii).
(d) $\sim (\sim e \,.\, c \,.\, 6)$ (H)
(e) $\sim (y) \sim (\sim (x) \sim (hx \,.\, gxy) \,.\, (x) \sim (\sim kx \,.\, gxy))$
De (6), (c) y (d) por (i).
(f) $\sim ((x) \sim (\sim kx \,.\, gxy) \,.\, \sim 8 \,.\, \sim (x) \sim (hx \,.\, gxy))$
(H)

(g) $\sim (\sim 8 \,.\, \sim (x) \sim (hx \,.\, gxy) \,.\, (x) \sim (\sim kx \,.\, gxy))$
De (f) por (ii).

(h) $\sim (\sim 8 \,.\, e)$ De (g) por (iv) y (v).

(8) De (e) y (h) por (i).

La versión verbal de (b) es

(10) Ninguna persona que entra al edificio, sin estar acompañada por un miembro de la firma, es subalterno de Fiorecchio.

Esta proposición es una consecuencia silogística de (3) y (1); y el argumento silogístico encuentra su expresión cuantificacional en las dos primeras líneas de la demostración dada.

La versión verbal de (e) es

(11) Alguna persona que está acompañada por un miembro de la firma es acompañada sólo por subalternos de Fiorecchio.

Este enunciado es consecuencia silogística de (10) y (2); y el argumento silogístico se expresa cuantificacionalmente en las líneas (c)-(e). El argumento de (11) a (4), que se desarrolla en las cuatro últimas líneas de la demostración dada, no pertenece a la parte de la teoría de la cuantificación que corresponde a la teoría del silogismo.

En esta demostración, las premisas (5)-(7) se citan en forma parecida a como, en las demostraciones anteriores, se citaban las formas cuya validez había sido establecida. Hay, sin embargo, ciertas diferencias. Solemos citar las formas (A)-(I) para establecer la validez de cualquier matriz que sea un ejemplo de las formas citadas. Por ejemplo, para establecer (a), citamos (H), aun cuando (a) presente '*j*' y '*k*' donde (H) presentaba '*g*' y '*h*'. En cambio, la mención de una premisa, tal como (5)-(7), sirve sólo para aducir tal premisa específica, sin permitir sustitución alguna de las partes '*fy*', '*gxy*', etc. Las premisas (5)-(7) fueron supuestas sólo con

ciertas interpretaciones de esas partes, y se volverían falsas con otras interpretaciones.

Otra restricción que debemos imponer al uso de premisas es la siguiente: la operación (iv) no debe usarse de manera que introduzca un cuantificador correspondiente a un pronombre que es libre en una premisa. Sería incorrecto, por ejemplo, argumentar que 'fy' implica '$(x)\,fx$', sobre la base de la siguiente deducción de la conclusión '$(x)\,fx$' de la premisa 'fy':

(a)	$(y)\,fy$	De la premisa por (iv).
	$(x)\,fx$	De (a) por (vi).

De hecho, 'fy' no implica, en general, '$(x)\,fx$'. Por ejemplo, cuando le damos a 'fy' (y a 'fx') el sentido 'y es hombre' (y 'x es hombre'), la implicación falla. La matriz condicional '$\sim (fy\ .\ \sim (x)\,fx)$' no es válida por ser falso su cuantificativo '$(y) \sim (fy\ .\ \sim (x)\,fx)$'. Para demostrar que este cuantificativo es falso, basta señalar un objeto y que no satisfaga a '$\sim (fy\ .\ \sim (x)\,fx)$'; Sócrates es un objeto de esta naturaleza, pues la conjunción 'Sócrates es hombre . $\sim (x)\,x$ es hombre' es verdadera.

Mientras obedezcamos esas dos restricciones, el método de las premisas es perfectamente aceptable. Cuando deducimos una conclusión sobre la base de premisas dadas, conjuntamente con matrices válidas cualesquiera, usando las operaciones (i), (ii), etc., y en conformidad con las dos restricciones consideradas, podemos concluir que la conjunción de las premisas implica cuantificacionalmente la conclusión. (La justificación del método se omitirá en este libro). Esto es, podemos concluir que el condicional formado por las premisas y la conclusión es válido. La demostración de (8) sobre la base de (5)-(7), tal como se dió hace un rato, establece que la conjunción de (5)-(7) implica cuantificacionalmente (8), y que el condicional (9) es válido cualesquiera sean las matrices representadas por 'fx', 'gxy', etc.

Como (9) es demostrable directamente sobre la base de (A) por medio de (i)-(iv), el método de las premisas no es sino una conveniencia teóricamente prescindible.

§ 30. *Teoría monádica de la cuantificación*

De los esquemas que tienen forma de matriz, llamaremos *monádicos* a aquéllos que sólo exhiben 'x' como pronombre, y que carecen de pronombres libres. Estipulemos, además, que el cuantificador '(x)' que figura en un esquema monádico, nunca se repita dentro de su propio alcance a la manera de '$(x)\,(\ldots(x)\,fx\ldots)$'. Los esquemas (B), (C), (D), (E), (H) e (I) son típicos esquemas monádicos. Y diversos esquemas no monádicos en este sentido pueden convertirse en monádicos por medio de (v) y (vi).

No puede haber ningún criterio mecánico para decidir en general si las matrices representadas por un esquema dado son válidas. Hay, sin embargo, un criterio mecánico que sirve a este fin en el caso de los esquemas monádicos [10]. Lo expondremos y ejemplificaremos sin justificarlo.

Sea un esquema monádico cualquiera, cuyas letras esquemáticas son 'f', 'g', 'h', ..., 'p', 'q', 'r', ... Sometemos cada uno de los cuantificativos de este esquema al siguiente proceso cuádruple de transformación:

(a) Si el cuantificativo, digamos '$(x)\,(\ldots)$', carece de cualquiera de las letras 'f', 'g', 'h',..., digamos de 'h', proveemos la letra que falta por medio de la transformación de '$(x)\,(\ldots)$' en '$(x)\,(\ldots.\sim(hx\,.\sim hx))$' (siendo ésta una transformación según (ii)).

(b) Llevamos a la forma canónica (§ 5) el texto íntegro regido por el cuantificador (transformación según (ii)), ordenando las letras 'f', 'g', ... por orden alfabético.

(c) Distribuimos el cuantificador según (iii).

(d) Si los cuantificadores resultantes contuviesen cualquiera de las letras 'p', 'q', 'r', ... (que representan matrices que no contienen 'x' como pronombre libre), trasladamos la letra fuera del cuantificativo por (v).

[10] Este hecho fue descubierto por Löwenheim. El criterio que se formula en el texto se debe, en esencia, a Herbrand.

Después de repetir este proceso respecto de todos los cuantificativos del esquema dado, para probar su validez bastará determinar si el resultado está implicado composicionalmente por

(1) $\sim ((x) \sim (fx \,.\, gx \,.\, hx. \ldots) . (x) \sim (\sim fx. gx. hx \,.\, \ldots) . (x) \sim (fx \,.\, \sim gx. hx \,.\, \ldots) . (x) \sim (\sim fx. \sim gx \,.\, hx \,.\, \ldots) . (x) \sim (fx \,.\, gx \,.\, \sim hx \,.\, \ldots) . \ldots).$

Apliquemos este método al principio (H) del silogismo. Sometiendo el primer cuantificativo de (H), es decir, '$(x) \sim (gx \,.\, hx)$' a la transformación (a), obtenemos

(2) $(x) \sim (gx \,.\, hx \,.\, \sim (fx \,.\, \sim fx)).$

Reduciendo la parte '$\sim (gx \,.\, hx \,.\, \sim (fx \,.\, \sim fx))$' de (2) a la forma canónica, según (b), convertimos (2) en

$$(x) (\sim (fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, \sim (\sim fx \,.\, gx \,.\, hx)).$$

Distribuyendo '(x)' con arreglo a (c), obtenemos

$$(x) \sim (fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, (x) \sim (\sim fx \,.\, gx \,.\, hx).$$

Los demás cuantificativos de (H) se convierten, por el mismo proceso, en

$$(x) \sim (fx \,.\, \sim gx \,.\, hx) \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim gx \,.\, \sim hx)$$

y

$$(x) \sim (fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim gx \,.\, hx)$$

respectivamente. De este modo, (H) queda convertido en

(3) $\sim ((x) \sim (fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, (x) \sim (\sim fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim gx \,.\, hx) \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim gx \,.\, \sim hx) \,.\, \sim ((x) \sim (fx \,.\, gx \,.\, hx) \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim gx \,.\, hx))).$

Queda por determinar si (1), para el caso de 3 letras, 'f', 'g' y 'h', implica composicionalmente (3). Hallamos una respuesta afirmativa sin considerar (1), porque (3) tiene la forma composicionalmente válida '$\sim (p \,.\, q \,.\, r \,.\, s \,.\, \sim (p \,.\, r))$'.

Veamos ahora cómo se aplica el método a (E) y (B). En (E),

el primer cuantificativo '$(x)\,fx$' ya está listo, y no necesita de ninguna de las operaciones (a)-(d). El otro cuantificativo, '$(x) \sim (p \,.\, \sim fx)$', se convierte en '$\sim (p \,.\, \sim (x)\,fx)$' por (d), de manera que (E) se transforma en

$$\sim (\sim (p \,.\, \sim (x)\,fx) \,.\, p \,.\, \sim (x)\,fx),$$

cuya validez composicional es clara. En cuanto a (B), ambos cuantificativos, '$(x)\,fx$' y '$(x) \sim fx$', ya están listos, de modo que sólo tenemos que determinar si (B) es implicado composicionalmente por (1). Como (B) no es composicionalmente válida [11], debemos considerar (1) explícitamente. Pero (1), determinado para el caso de una única letra 'f', es idéntico a (B), y por lo tanto implica composicionalmente (B).

Si bien la parte monádica de la teoría de la cuantificación tiene un carácter de marcada sencillez, no deja de revestir importancia; en particular, incluye la lógica silogística; por esto es que tiene interés la existencia de un criterio mecánico de validez adecuado a esta parte. Pero en la teoría general de la cuantificación siempre debemos contentarnos con métodos que dependen de la búsqueda no sistemática de demostraciones.

§ 31. *El aspecto práctico*

El dominio de las técnicas de la teoría de la cuantificación puede tener utilidad de una manera vinculada muy directamente con la vida práctica. Según E. C. Berkeley, estas técnicas pueden ser de utilidad para simplificar los acuerdos legales. La redacción de un contrato de seguros es a veces empresa complicada. La reglamentación de un plan de jubilaciones para los empleados de una gran corporación llenaría más de una docena de páginas impresas en letra menuda. ¿Qué razón tenemos para juzgar que no podría for-

[11] Más exactamente, las matrices de la forma (B) no son composicionalmente válidas. La aplicación directa de los términos 'validez' e 'implicación' a los esquemas es inexacta pero conveniente.

mularse lo mismo en la mitad del espacio, recombinando y reclasificando solamente las circunstancias relacionadas con los empleados por medio de reglas diferentes? Si existe semejante simplificación, el sentido común jamás habrá de revelarla a no ser por azar, pues los planes de pensiones son demasiado complicados como para ser meditados *in totum*. Sin embargo, podemos esquematizar las cláusulas por medio de la notación de la teoría de la cuantificación, transformando luego sistemáticamente el conjunto de las cláusulas en el equivalente más simple, y retraduciendo finalmente el resultado al lenguaje común.

No obstante, el mayor valor de la teoría de la cuantificación reside, con mucho, en su aplicación a la propia teoría matemática. Porque la teoría de la cuantificación aclara la relación de "seguirse lógicamente", es decir, de implicación; y ésta es la relación que conecta todo teorema matemático con los axiomas que lo implican. Si bien los conceptos matemáticos y los axiomas que los rigen han sido bien explicitados desde mucho tiempo atrás, la conexión entre axiomas y teoremas permaneció vaga y mal analizada hasta que Frege creó la teoría de la cuantificación. Es en virtud de esta consideración explícita de la implicación lógica que por fin se ha podido obtener, en el estudio de la prueba matemática misma, el tipo de precisión matemática que había dado tanto resultado en el estudio de los números y de otros temas afines. Un estudio matemático de la demostración matemática con ese carácter ya ha dado resultados notables, particularmente en los trabajos de Gödel (§ 54).

III. Identidad y existencia

§ 32. *Identidad*

Ya hemos encontrado, en varios ejemplos, la notación de identidad '$x = y$', pero nos queda por estudiar la identidad en forma directa, como una de las ideas de la lógica. La noción de identidad es tan simple y fundamental que difícilmente admite explicación en términos más claros, fuera de meras transformaciones sinonímicas. Decir que x e y son idénticos es decir que son la misma cosa. Todo objeto es idéntico a sí mismo y a nada más.

Pero a pesar de que la identidad es una noción tan elemental, ha sido objeto de confusiones persistentes. Una de estas confusiones se encuentra en el dicho de uno de los filósofos más antiguos, Heráclito, según el cual "No es posible descender dos veces al mismo río". Dado que las aguas se renuevan continuamente, razonaba Heráclito, ya será un río diferente en el momento en que entremos en él por segunda vez. La misma dificultad se encuentra, en otra forma, en la cuestión de cómo podemos considerar que una persona conserve el mismo cuerpo, en vista de que la constitución material del cuerpo cambia constantemente. En general, la dificultad radica en concebir cómo un objeto que cambia permanece idéntico a sí mismo. El origen de esta dificultad se encuentra menos en el concepto mismo de identidad que en el tratamiento del tiempo.

Consideremos un río. Es un objeto extenso, tanto en el tiempo como en el espacio. Es la totalidad de sus diversos estados instan-

táneos, así como de sus diversas secciones transversales entre la fuente y la desembocadura. El río no es la suma de ciertas gotas de agua; cada gota comparte la extensión espacial del río sólo dentro de una porción de la extensión temporal de la gota y del río. Por más que cambie, tanto en relación con su constitución material como en relación con otros factores, el río sigue siendo el mismo río durante toda su existencia; sigue siendo la idéntica totalidad de los diversos estados instantáneos. Algo parecido ocurre con el cuerpo humano. Son solamente los diversos estados instantáneos que componen el río total, o el cuerpo total, los que difieren unos de otros. Pero también cada uno de estos estados instantáneos es idéntico a *sí* mismo.

Otro tipo de confusión sobre el concepto de identidad se presenta en una observación de Wittgenstein: decir de un objeto que es idéntico a sí mismo es una vacuidad, y decir que es idéntico a otro objeto es absurdo. En verdad, no hay que distinguir dos sino tres casos, los que ejemplificamos por los enunciados 'Cicerón = Cicerón', 'Cicerón = Catilina', y 'Cicerón = Tulio'. De estos tres enunciados, el primero es vacuo y el segundo falso; pero el tercero no es vacuo ni falso. El tercero es informativo, porque combina dos nombres distintos; y además es verdadero, pues los dos nombres son nombres del mismo objeto. Al no distinguir cuidadosamente entre los objetos y sus nombres, Wittgenstein considera que toda afirmación verdadera de identidad debe exhibir el signo '=' entre repeticiones del mismo nombre, a la manera de 'Cicerón = Cicerón'. Pero Wittgenstein no advierte que '=' sólo debe aparecer entre *nombres* del mismo objeto, siendo los nombres, en todos los casos útiles, nombres diferentes. Cicerón es idéntico a Tulio, aunque el nombre 'Cicerón' sea diferente del nombre 'Tulio'; así como el Nilo es mayor que el Paranaíba aun cuando el nombre 'Nilo' sea más breve que el nombre 'Paranaíba'.

La misma confusión entre identidad de los objetos e identidad de sus nombres se encuentra en la mente de muchos matemáticos que consideran que una ecuación, tal como '5 + 3 = 2 + 6', relaciona dos números que son iguales en algún sentido, y sin embargo

no son idénticos, por ser distintas las expresiones '5 + 3' y '2 + 6'. En su libro *Universal Algebra*, Whitehead hizo la misma afirmación respecto de la ley '$x + y = y + x$'.

Esta confusión entre signo y objeto conduce a veces a la idea de que la identidad es una relación entre los signos mismos y no entre los objetos. Leibniz, por ejemplo, escribió que "Dos términos son *los mismos* (*eadem*) si uno de ellos puede ser sustituído por el otro sin destruir la verdad del contexto (*salva veritate*)" [12]. Es claro que los términos no son los mismos; los que son los mismos son los objetos indicados por los términos. Usamos nombres de objetos para afirmar la identidad de los objetos o cualquier otra relación entre objetos. La afirmación de la identidad de los objetos es verdadera si los términos de la afirmación están ligados por cierta relación que no es la de identidad, sino la de designar el mismo objeto.

§ 33. *Principios de identidad*

Uno de los principios fundamentales de la identidad forma parte de lo que está formulado de manera confusa en la cita de Leibniz. Es el principio de la *sustituibilidad de la identidad*, según el cual (aproximadamente) dado un enunciado verdadero de identidad, si uno de los dos términos es sustituído por el otro en cualquier verdad, el resultado se conserva verdadero. Formulado de manera exacta, el principio expresa que toda matriz de la forma

$$\text{(J)} \qquad \sim (x = y \,.\, fx \,.\, \sim fy)$$

se torna verdadera cuando se le aplican cuantificadores iniciales. En una palabra, toda matriz de este tipo es válida. No es cuantificacionalmente válida, en el sentido de que el resultado de la aplicación de cuantificadores sea cuantificacionalmente verdadero, sino que es válida en el sentido de que el resultado de semejante

[12] Cf. Lewis, *Survey*, p. 373.

aplicación de cuantificadores es verdadero (de hecho, lógicamente verdadero). Podríamos introducir los términos 'idénticamente válido' e 'idénticamente verdadero' en consonancia con esta extensión de la lógica más allá de la teoría de la cuantificación.

Esa formulación del principio de sustituibilidad es inexacta en lo que respecta a la expresión 'toda matriz de la forma J'. Esta expresión debe entenderse en el sentido siguiente: toda matriz formada por (J), en la que 'fx' y 'fy' se sustituyen por matrices tales que la segunda difiere de la primera sólo por figurar 'y' en forma libre en lugar de algunas figuraciones libres de 'x'. Obsérvese, en contraste con esto, que en las matrices "de la forma (A)" la matriz que sustituya a 'fy' debe contener 'y' en lugar de *todas* las figuraciones * libres de 'x' en la matriz que sustituye a 'fx' [13].

Además de (J), el único principio fundamental es el de la *identidad de sí mismo*:

(K) $\quad (x) \quad x = x$

Vale decir, la matriz '$x = x$' es válida, y el enunciado '$(x)\ x = x$' es verdadero. Hemos escrito el cuantificador bien alejado a la izquierda para poder considerar únicamente la matriz cuando nos refiramos a (K) en el curso de demostraciones posteriores. Este tratamiento de los cuantificadores al comienzo de los teoremas será el usual.

Es fácil deducir otros principios. Uno de ellos, el de la *transitividad* de la identidad, afirma que, cualesquiera que sean x, y y z, si $x = y$ e $y = z$, entonces $x = z$. Esto es,

(L) $\quad (x)\ (y)\ (z) \quad \sim (x = y\ .\ y = z\ .\ \sim x = z).$

Demostración:

(a) $\sim (y = z\ .\ x = y\ .\ \sim x = z)$ (J)
(L) De (a) por (i).

* Se ha traducido *ocurrência* (del inglés *occurrence*) por figuración. "Figuración libre" de una variable en una matriz significa que la variable figura, aparece o se presenta en la matriz sin estar sujeta a cuantificador alguno. (N. del T.)

[13] En un estudio más riguroso y detallado que el presente, el contraste seña-

El principio siguiente, de la *simetría* de la identidad, dice que el orden en una identidad es indiferente.

(M) $(x)\ (y) \qquad \sim (x = y\ .\ \sim y = x)$

Demostración:

(a) $\sim (x = y\ .\ x = x\ .\ \sim y = x)$ (J)

(M) De (a) y (K) por (i).

El principio siguiente afirma que todo objeto es idéntico a algún objeto.

(N) $(x) \qquad \sim (y) \sim x = y.$

Demostración:

(a) $\sim ((y) \sim x = y\ .\ x = x)$ (A)

(N) De (a) y (K) por (i).

§ 34. *Figuración no puramente designativa* [14]

La formulación (J) del principio de sustituibilidad contiene pronombres como términos de la identidad; pero examinemos algo más de cerca la versión menos técnica, dada anteriormente, según la cual los nombres vinculados con un enunciado verdadero de identidad resultan intercambiables sin que se destruya la verdad del contexto. Es fácil encontrar casos contrarios a este principio. Por ejemplo, los enunciados

(1) Giorgione = Barbarelli

(2) Giorgione era llamado así por ser gordo

son verdaderos; sin embargo, la sustitución del nombre 'Giorgione' por el nombre 'Barbarelli' convierte a (2) en el enunciado falso

(3) Barbarelli era llamado así por ser gordo.

lado se presentaría más explícita y sistemáticamente. Cf. mi *Methods of Logic*, §§ 23, 25.

[14] El contenido esencial de los §§ 34 y 36 se debe a Frege (1892).

Análogamente, los enunciados

(4) Cicerón = Tulio
(5) 'Cicerón' tiene siete letras

son verdaderos, pero la sustitución del primer nombre por el segundo falsifica a (5). Por otra parte, la base del principio de sustituibilidad parece bien sólida. Todo lo que puede decirse sobre la persona de Cicerón (o Giorgione) debe ser verdadero igualmente para la persona Tulio (o Barbarelli), puesto que se trata de la misma persona.

Con relación a (5), esta paradoja se resuelve inmediatamente. El hecho es que (5) no es un enunciado sobre la persona de Cicerón, sino simplemente sobre la palabra 'Cicerón'. El principio de sustituibilidad no debe extenderse a contextos en que el nombre a sustituir figura sin referencia al objeto.

La relación de un nombre con el objeto que nombra se llama *designación*; el nombre 'Cicerón', por ejemplo, designa al hombre Cicerón. La figuración de un nombre con referencia al objeto designado se llamará *puramente designativa*. La falla de la sustituibilidad sólo revela que la figuración a sustituir no es puramente designativa, sino que el enunciado depende de la forma del nombre además del objeto. Pues es claro que todo lo que puede afirmarse acerca de un *objeto* se conserva verdadero cuando nos referimos al objeto designándolo con cualquier otro nombre.

Una expresión que consiste de otra expresión entre comillas simples constituye un nombre de la expresión que encierran las comillas; está claro en general que la figuración de la expresión interior o de cualquier parte de ella, dentro del contexto encerrado entre comillas, no es designativa. En particular, la figuración de nombres propios dentro de un contexto que contiene comillas, tal como (5), no es designativa y por lo tanto no está sujeta a la sustituibilidad. El nombre propio aparece así como mero fragmento de un nombre más largo que contiene, además de ese fragmento, dos comillas. Sustituir el nombre personal, dentro de semejante con-

texto, no sería más correcto que sustituir el término 'asa' dentro del contexto 'casa'.

El ejemplo (2) es un poco más sutil, pues es un enunciado sobre un hombre y no solamente sobre su nombre. El hombre, y no su nombre, era llamado tal y tal; y era el hombre, y no su nombre, quien era gordo. Sin embargo, la falla de la sustituibilidad revela que la figuración del nombre propio en (2) no es puramente designativa. En efecto, es fácil traducir (2) a otro enunciado que contiene las dos figuraciones del nombre, una puramente designativa y la otra no:

(6) Giorgione era llamado 'Giorgione' por ser gordo.

La primera vez, el nombre aparece en forma puramente designativa. Una sustitución sobre la base de (1) convierte a (6) en otro enunciado igualmente verdadero:

Barbarelli era llamado 'Giorgione' por ser gordo.

La segunda vez, el nombre propio figura en forma tan poco designativa como cualquier figuración dentro de un contexto encerrado entre comillas.

Para ilustrar otro tipo de enunciado bien común, en que figuran nombres en forma no designativa, consideremos una de las personas que se llaman Felipe y satisfacen la condición

(7) Felipe ignora que Tulio denunció a Catilina,

o bien la condición

(8) Felipe cree que Tegucigalpa está en Nicaragua.

La sustitución sobre la base de (4) convierte la verdad (7) en el enunciado

(9) Felipe ignora que Cicerón denunció a Catilina,

que sin duda es falso. Del mismo modo, la sustitución sobre la base de la verdad

Tegucigalpa = capital de Honduras,

transforma la verdad (8) en el enunciado falso

(10) Felipe cree que la capital de Honduras está en Nicaragua.

Vemos, pues, que la figuración del nombre 'Tulio' en (7), y del nombre 'Tegucigalpa' en (8), no son puramente designativas.

A este respecto hay un contraste fundamental entre (7) u (8), por una parte, y

Craso oyó a Tulio denunciar a Catilina

por la otra. Este enunciado afirma una relación entre tres personas; y las personas relacionadas de esta manera son independientes de los nombres que se les da. Pero no se puede considerar que (7) afirme una relación entre tres personas, ni (8) una relación entre persona, ciudad y país, al menos si interpretamos nuestras palabras de manera tal que admitamos que (7) y (8) son verdaderos y (9) y (10) falsos.

Quizá algunos lectores quieran considerar el ignorar y el creer como relaciones entre persona y *enunciado*, escribiendo (7) y (8) en la forma

Felipe ignora 'Tulio denunció a Catilina',
Felipe cree 'Tegucigalpa está en Nicaragua',

a fin de colocar dentro de un contexto con comillas simples toda figuración no puramente designativa de un nombre. Pero no es necesario forzar de esta manera la analogía entre los casos del tipo (7)-(8) y los del tipo (5)-(6). No es necesario insistir en que toda figuración no designativa de un nombre debe formar parte del nombre de una expresión. Lo que es importante es comprender que 'ignora que...' y 'cree que...' son contextos en que las figuraciones de los nombres no son puramente designativas. Lo mismo ocurre con los contextos 'sabe que...', 'duda que...', 'encuentra sorprendente que...', y otros semejantes.

§ 35. *Lugares inaccesibles al pronombre*

La naturaleza no puramente designativa de la figuración del nombre 'Giorgione' en (2) se pone aun más claramente de manifiesto si intentamos usar un pronombre en lugar de esa figuración, por ejemplo, de la manera siguiente:

(11) $\sim (x) \sim x$ era llamado así por ser gordo,

o sea,

(12) Hay alguien (o más generalmente: algo) que era llamado así por ser gordo.

Esta combinación de palabras puede tener sentido sólo dentro de un contexto más amplio en que se encuentre alguna palabra anterior como antecedente de la palabra 'así'. Si no se la considera en un contexto más amplio, sino como variante o consecuencia del enunciado (2), la expresión (12) (o la (11)) está privada de sentido. No tiene sentido decir simplemente de un objeto que es "llamado así". Pues ¿acaso será este objeto la persona Giorgione, esto es, Barbarelli? Pero la afirmación de que este objeto es "llamado así por ser gordo" sería al mismo tiempo verdadera, en la forma (2) del § 34, y falsa en la forma (3).

Es natural que surja un resultado carente de sentido, de semejante uso de un pronombre en el lugar de una figuración no designativa de un nombre. El pronombre 'x' constituye, en combinación con su cuantificador '(x)', un medio para referirnos de manera general a todo objeto. Aunque los objetos puedan ser de cualquier género —concretos o abstractos, físicos o mentales— está claro que no puede provenir sentido alguno del uso del pronombre en un lugar que es inadecuado para la designación de objetos. No tiene sentido usar el pronombre en el lugar de la sílaba 'sil' en 'Brasil es extenso', en la forma '$\sim (x) \sim$ Bra$x$ es extenso'; por ejemplo, en 'Hay un objeto tal que Bra-él es extenso'.

El uso del pronombre en el lugar de una figuración no pura-

mente designativa de un nombre es análogo a este ejemplo, aun cuando menos grotesco.

Tiene sentido, en cambio, usar el pronombre en la posición de la figuración puramente designativa del nombre 'Giorgione', en (6). Por ejemplo, podemos afirmar que

(13) $\sim (x) \sim x$ era llamado 'Giorgione' por ser gordo,

esto es,

Alguien (o mejor dicho, algo) era llamado 'Giorgione' por ser gordo.

Consideremos ahora el resultado del uso de un pronombre en lugar de la figuración no designativa del nombre propio en (5). Examinemos el enunciado aparente

(14) $\sim (x) \sim$ 'x' contiene siete letras

y su equivalente verbal aparente

(15) Algún objeto es tal que 'él' contiene siete letras.

Toda expresión formada por comillas simples es nombre de la expresión entre comillas; y, en particular, la expresión consistente en la letra 'x' y dos comillas es nombre de la propia letra. La expresión

(16) 'x' contiene siete letras

quiere decir, simplemente,

La antepenúltima letra del alfabeto (castellano) contiene siete letras,

y es, por lo tanto, un enunciado falso. En (14) la figuración de la letra entre comillas no se refiere al cuantificador, que es por consiguiente superfluo. Vemos, pues, que el uso del cuantificador '(x)' en (14), como prefijo de la negación de (16), es simplemente una violación de la regla que suprime los cuantificadores vacíos (§ 19).

La condición de (15) es semejante a la de (14). La expresión

'él' contiene siete letras

es un enunciado falso, y sólo se torna verdadero cuando sustituimos 'siete' por 'dos'. El prefijo 'algún objeto es tal que', en (15), es vacío.

Es menos obvio, y tanto más importante, advertir que también el uso de un pronombre en las posiciones de las figuraciones no puramente designativas de los nombres 'Tulio' y 'Tegucigalpa' en (7) y (8) conduce a resultados carentes de sentido. Consideremos el caso

(17) $\sim (x) \sim$ Felipe ignora que x denunció a Catilina

traducido a palabras:

> Hay alguien (mejor: algo) tal que Felipe ignora que él denunció a Catilina.

Aunque gramaticalmente correctas, estas expresiones no tienen sentido, al menos si interpretamos nuestras palabras de modo tal que admitamos (7) como verdadero y (9) como falso. Pues ¿será Tulio, es decir, Cicerón, aquella persona que Felipe ignora que ella denunció a Catilina? Pero semejante afirmación sería al mismo tiempo verdadera en la forma (7) y falsa en la forma (9).

Obsérvese que la expresión

(18) Felipe ignora que $\sim (x) \sim x$ denunció a Catilina

difiere de (17) y tiene pleno sentido, pues es un enunciado falso que afirma que Felipe ignora que Catilina fue denunciado. El uso que no tiene sentido es aquél en que —como en el ejemplo (17)— una cláusula de la forma 'ignora que...', 'cree que...', 'dice que...', etc., contiene un pronombre que se refiere a un cuantificador anterior a dicha cláusula. Ese conocimiento impone, al uso de los cuantificadores y de sus equivalentes verbales, una restricción quizá severa y molesta, pero inevitable.

§ 36. *Sentido. Sinonimia. Necesidad*

Decir que dos nombres designan un mismo objeto no es decir que son *sinónimos*, o que tienen el mismo sentido. Para determinar la sinonimia de dos nombres o de otras expresiones debe bastar comprender las expresiones; pero para determinar si dos nombres designan el mismo objeto, puede hacerse necesario indagar la Naturaleza. Los nombres 'lucero de la tarde' y 'lucero del alba', por ejemplo, no son sinónimos pues han sido aplicados, cada uno de ellos, a una cierta esfera de materia, según criterios diferentes. Pero de ciertas investigaciones astronómicas resulta que designan la misma esfera, el mismo planeta en ambos casos; esto es, los nombres designan una misma cosa. La identidad

(1) Lucero del alba = lucero de la tarde

es una verdad de la astronomía que no se sigue meramente de los sentidos de las palabras.

Igualmente resulta de investigaciones astronómicas, y no del sentido de las palabras, que el objeto (el número, o grado de multiplicidad) designado por el ideograma '9' es el mismo que el designado por el nombre complejo 'el número de planetas'. La identidad

(2) El número de planetas = 9

es una verdad (según se cree actualmente) perteneciente a la astronomía. Los nombres 'el número de planetas' y '9' no son sinónimos, no tienen el mismo sentido. Este hecho se acentúa por la posibilidad, que siempre existe, de que (2) sea impugnada por el descubrimiento de otro planeta.

Otro contraste entre el designado y el sentido es que sólo ciertas expresiones muy especiales (a saber, los nombres de los objetos designados) designan, mientras que quizá todas las palabras y otras unidades más complejas que pueden figurar en los enunciados, tienen sentido.

Qué sea, precisamente, el *sentido* de una expresión —qué género

de objeto—, no es claro todavía; pero sí es claro que, dada la noción de sentido, podríamos aclarar fácilmente la noción de *sinonimia* como relación entre expresiones cualesquiera que tienen el mismo sentido. También, recíprocamente, dada la relación de sinonimia, sería fácil deducir la noción de sentido, y ello de la manera siguiente: el sentido de una expresión es la clase de todas las expresiones sinónimas de ella. Quizá sea ésta la dirección más promisoria de las investigaciones. La relación de sinonimia exige una definición o un criterio en términos psicológicos y lingüísticos. Una definición semejante, que ni siquiera ha sido esbozada, sería una contribución fundamental a la filología y a la filosofía al mismo tiempo.

La relación de sinonimia está presupuesta, como hemos visto, en la noción de sentido, tan utilizada en todo el lenguaje diario. La noción de sinonimia también figura implícitamente cuando usamos el método de la citación indirecta. En la citación indirecta no exigimos una repetición literal, sino que exigimos una frase *sinónima*: exigimos una reproducción del *sentido*. Tal sinonimia difiere de la equivalencia lógica; y todavía no se sabe qué *es* exactamente.

La relación de sinonimia también está implicada en la noción, tan corriente en los círculos filosóficos desde Kant, de enunciados *analíticos*. Se suele describir el enunciado analítico como el enunciado que es verdadero en virtud del sentido de las palabras que lo forman; o, como un enunciado que se deduce lógicamente del sentido de las palabras. Dada la noción de sinonimia, y dada también la noción de verdad lógica, podríamos definir un enunciado analítico como cualquier enunciado que es lógicamente verdadero o que puede reducirse a una verdad lógica mediante la sustitución de expresiones por expresiones sinónimas. El enunciado 'Ningún soltero es casado', por ejemplo, es analítico, pues se reduce a la verdad 'Ningún hombre no casado es casado' sustituyendo la expresión 'soltero' por la expresión sinónima 'hombre no casado'.

Ejemplo citado por Mates "Log Mat" E.E.M. pag 27

Entre los diversos sentidos posibles del vago adverbio 'necesariamente' podemos aislar uno —el sentido de *necesidad analítica*— según el siguiente criterio: el resultado de aplicar 'necesariamente'

a un enunciado será verdadero si el enunciado originario era analítico; en caso contrario ese enunciado será falso.

Por ejemplo, el enunciado

(3) Necesariamente ningún soltero es casado,

equivale a

(4) 'Ningún soltero es casado' es analítico

y es, por lo tanto, verdadero. El enunciado

(5) 9 es necesariamente mayor que 7

equivale a

(6) '9 > 7' es analítico

y por consiguiente es verdadero (si admitimos que la aritmética se reduce a la lógica; cf. Introducción). El enunciado

(7) Necesariamente, si hay vida en el lucero del alba, entonces hay vida en el lucero del alba

equivale a

(8) 'Si hay vida en el lucero del alba, luego hay vida en el lucero del alba' es analítico

o, también,

(9) 'Hay vida en el lucero del alba' implica analíticamente 'Hay vida en el lucero del alba'

(se llama *implicación analítica* a la relación de un enunciado con otro, tal que el condicional formado por los mismos sea analítico). El enunciado (7) es, pues, verdadero, ya que el mencionado condicional es composicionalmente verdadero y, por lo tanto, analítico.

En cambio, los enunciados

(10) El número de planetas es necesariamente mayor que 7

(11) Necesariamente, si hay vida en el lucero del alba, luego hay vida en el lucero de la tarde,

son falsos, pues los enunciados

El número de planetas es mayor que 7
Si hay vida en el lucero del alba, luego hay vida en el lucero de la tarde,

son verdaderos tan sólo por circunstancias ajenas a la lógica.

Los prefijos 'es posible que' y 'es imposible que' se definen inmediatamente sobre la base de 'necesariamente', teniendo los sentidos 'no necesariamente no' y 'necesariamente no' respectivamente. Así, por ejemplo, (3) puede formularse de la siguiente manera:

(12) Es imposible que haya solteros casados.

§ 37. *Composición intensional de enunciados*

Los enunciados (4), (6), (8) y (9) son, explícitamente, enunciados sobre enunciados. Atribuyen la propiedad de analiticidad o la relación de implicación analítica a los enunciados, refiriéndose a estos enunciados por el uso de sus nombres (construídos con comillas simples). En cambio, (3), (5), (7) y (12) no tratan de otros enunciados con el uso de sus nombres; son compuestos de los propios enunciados. Los prefijos 'necesariamente' y 'es imposible que' lo mismo que el tilde de la negación, se aplican a enunciados para formar otros enunciados.

El contraste entre 'necesariamente' y 'es analítico' es exactamente análogo al contraste entre '$\sim$' y 'es falso'. Escribir el tilde antes del propio enunciado, tal como en

$$\sim 9 < 7,$$

tiene el mismo sentido que escribir las palabras 'es falso' después del nombre del enunciado, en la forma

'9 < 7' es falso.

En el ejemplo (7) podemos reconocer un nexo complejo: 'necesariamente, si — luego'. Este nexo, de modo análogo a 'si — luego', o al punto de la conjunción, vincula enunciados para formar otros.

Hay, sin embargo, una diferencia notable entre los compuestos reducibles a negación y a conjunción, por una parte, y los compuestos (3), (5), (7) y (12), por la otra. Estos últimos son compuestos *intensionales*, en el sentido (cf. § 7) de que el valor del compuesto no está determinado solamente por los valores de los componentes.

Aun los enunciados (4), (6), (8) y (9), además de contener los nombres de los enunciados y de discurrir sobre estos enunciados, están literalmente *compuestos* por dichos enunciados; las comillas que figuran en ellos forman parte de una expresión aplicada al enunciado componente para formar el compuesto. Así como los enunciados '~ 9 > 7' y (5) están formados por el enunciado componente '9 > 7' por aplicación de '~' y 'necesariamente', podemos considerar que (6) está formado por el mismo componente por aplicación de dos comillas y de las palabras 'es analítico'. De modo análogo para (4), (8) y (9).

La manera en que figuran tales enunciados componentes en los "compuestos" (4), (6), (8) y (9) es, en verdad, bastante irregular y accidental. En general, sabemos que toda materia dentro de un contexto con comillas está aislada, en un sentido importante, del contexto mayor. Sabemos que un nombre dentro de un contexto con comillas no figura designativamente, y que un pronombre dentro de semejante contexto no se refiere a un cuantificador anterior a las comillas (cf. §§ 34-35).

Es por la presunta ausencia de estos defectos que la composición intensional de enunciados por medio de 'necesariamente', 'es posible que', y 'necesariamente, si — luego', por analogía con la composición extensional por medio de '~' y '.', pretende ser una

composición de enunciados en un sentido más genuino que la composición que coloca el componente entre comillas. Se imagina que los contextos 'necesariamente...' y 'es posible que...' puedan admitir pronombres referentes a cuantificadores anteriores. Ejemplo:

> Si un objeto posee necesariamente una u otra de dos propiedades, entonces no es posible que carezca de ambas propiedades

esto es

> $(x)\ (y)\ (z) \sim (y$ y z son propiedades . necesariamente x tiene y o z . es posible que x carezca de y y $z)$

Estos modos de composición intensional tienen, en verdad, los mismos defectos que el contexto con comillas. Pues, dado que una sustitución sobre la base de la verdad (1) basta para transformar el enunciado verdadero (7) en el falso (11), debemos concluir que la figuración final del nombre 'lucero del alba' en (7) no es puramente designativa. Igualmente, dado que una sustitución sobre la base de la verdad (2) convierte la verdad (5) en el enunciado falso (10), concluimos que el nombre '9' no figura en (5) de manera puramente designativa.

Se sigue que el contexto 'necesariamente...', al menos en el sentido analítico que estamos considerando, es semejante al contexto con comillas y a los contextos 'ignora que...', 'cree que...', etc.: no admite pronombres que se refieran a cuantificadores anteriores al contexto [15].

La expresión

$$\text{Necesariamente} \sim (x) \sim x > 7,$$

esto es, 'Necesariamente algo es mayor que 7' tiene pleno sentido, siendo, por cierto, un enunciado verdadero; pero la expresión

$$\sim (x) \sim x \text{ es necesariamente mayor que } 7,$$

[15] Esta circunstancia debe ser tenida cuidadosamente en cuenta al evaluar cálculos de necesidad, como por ejemplo el de C. I. Lewis. (Véase la Bibliografía).

esto es, 'Hay algo que es necesariamente mayor que 7', no tiene sentido. Pues ¿será 9, o sea, el número de planetas, uno de los números necesariamente mayores que 7? Pero semejante afirmación sería al mismo tiempo verdadera en la forma (5) y falsa en la forma (10). Observaciones similares a ésta se aplican al uso de pronombres en relación con el ejemplo (7).

Esa resistencia a la cuantificación, que hemos observado en relación con el contexto 'necesariamente. . .', se la encuentra también en relación con los contextos derivados 'es posible que. . .', etc.

Vemos, pues, que los compuestos aparentes (3), (5), (7) y (12) son compuestos de los enunciados interiores solamente en el sentido irregular o accidental que hemos observado en el caso de los contextos en que aparecen comillas. Quizá sería más claro conservar las formas (4), (6), (8) y (9) en lugar de las (3), (5), (7) y (12).

Es claro que estas observaciones se aplican al prefijo 'necesariamente' sólo en el sentido de necesidad analítica; y, correspondientemente, en lo que atañe a la posibilidad y a la imposibilidad, así como al condicional necesario. En cuanto a las demás nociones de necesidad o posibilidad física, el primer problema sería formular las nociones con claridad y precisión. Después se podría indagar si tales nociones implican figuraciones no designativas de nombres y se resisten, por lo tanto, al uso de pronombres referentes a cuantificadores exteriores.

Esta cuestión concierne íntimamente al uso práctico del lenguaje. Concierne, por ejemplo, al uso del condicional "irreal" (cf. § 7) dentro de un cuantificativo; porque es razonable suponer que el condicional irreal se reduce a la forma 'Necesariamente si p luego q', en algún sentido de necesidad. A su vez, del condicional irreal depende, por ejemplo, esta definición de solubilidad en agua: Decir que un objeto es soluble en agua es decir que se disolvería si estuviese en el agua. En la física necesitamos naturalmente, la matriz

x es soluble en agua

como cláusula dentro de diversos cuantificativos (o del contexto

equivalente en el lenguaje verbal); luego, según la definición considerada, tendríamos que admitir entre los cuantificativos la expresión 'si x estuviese en el agua, luego x se disolvería', o sea, 'necesariamente, si x está en el agua, luego x se disuelve'. No sabemos si existe algún sentido adecuado de "necesidad" que admita pronombres referentes a cuantificadores exteriores [16].

Aquí se trata más bien de problemas que de soluciones. Pero un resultado importante de estas consideraciones es el reconocimiento de que cualquier modo intensional de composición de enunciados, sea que se base sobre alguna noción de "necesidad" o, por ejemplo, sobre un concepto de "probabilidad" (como en el sistema de Reichenbach), tiene que ser examinado cuidadosamente en relación con su susceptibilidad a los cuantificadores. Quizá los únicos modos útiles de composición de enunciados, que están sujetos a cuantificadores, sean los extensionales (reducibles a '$\sim$' y '.'). Hasta hoy no hay ningún ejemplo claro en contrario. Y se sabe, en particular, que en matemáticas no se necesita ningún modo intensional de composición de enunciados.

§ 38. *Existencia*

La palabra 'nombre' tiene un sentido *gramatical* y otro *semántico*. Prefiero dotar a la palabra 'sustantivo' de aquel sentido gramatical, reservando para la palabra 'nombre' el sentido semántico: *lo que es nombre de un objeto*, en una palabra, lo que *designa*.

Todos los nombres designan aunque en ocasiones —como ya hemos podido observarlo— tengan figuraciones no designativas. Pero nos queda por considerar ciertos sustantivos que se distinguen de los nombres, no por rasgo gramatical alguno, sino simplemente porque no designan. Un ejemplo es el sustantivo 'Pegaso'.

La cuestión de si un sustantivo es nombre, como la de si dos nombres designan un mismo objeto (cf. § 36), generalmente no se

[16] Para una teoría interesante de los "términos disposicionales" tales como 'soluble', véase Carnap, "Testability and Meaning".

decide por el estudio del mero sentido de las palabras. Desde el punto de vista puramente lingüístico, las palabras 'Pegaso' y 'Bucéfalo' son semejantes; es sólo un accidente de la historia natural el que 'Bucéfalo' designa y 'Pegaso' no.

La cuestión de si dos nombres designan el mismo objeto equivale, como ya sabemos, a la cuestión de si el enunciado de identidad formado por los dos nombres es verdadero; y esta identidad puede ser, como en el caso (1) del § 36, una verdad de la ciencia natural. Análogamente, el problema de si un sustantivo es nombre equivale al de si el enunciado de existencia formado por el nombre es verdadero; y este enunciado puede ser, como en el caso de

(1) Existe Bucéfalo,

una verdad de la ciencia natural (en este caso, de la historia).

En este punto, como anteriormente, es útil considerar los verbos como privados de determinaciones temporales intrínsecas. En este sentido, (1) no afirma que todavía viva Bucéfalo. Bucéfalo es una porción extensa del universo espaciotemporal. Tiene un volumen espacial de varios hectolitros, y uno temporal de varios años, aun cuando estas regiones del espacio y del tiempo estén lejos de nosotros; (1) no afirma que esa extensión temporal toca al año 1942, y tampoco afirma que esa extensión espacial toca a Brasil. Simplemente, afirma que existe, de hecho, la supuesta porción del universo espaciotemporal. El enunciado

(2) ~ existe Pegaso

niega que haya, lejos o cerca, un volumen del universo espaciotemporal tal como lo supusieron los griegos de la antigüedad bajo el sustantivo 'Pegaso'; (2) es, como (1), una verdad de la ciencia natural.

No debe objetarse que Pegaso existe por ser cosa mental. Acaso haya una *idea de* Pegaso, e igualmente una idea de Bucéfalo. Pero ni (1) afirma ni (2) niega la existencia de una idea, sino de un animal. Las ideas de Bucéfalo y Pegaso no son designadas por las palabras 'Bucéfalo' y 'Pegaso' de (1) y (2) respectivamente, sino

por expresiones diferentes: 'la idea de Bucéfalo' y 'la idea de Pegaso'.

Además, creo que es poco lo que ganamos diciendo que Pegaso existe en el mundo de la mitología griega y no en el mundo real. Metáforas aparte, hay sólo un mundo. Fue en relación con este mundo que el griego afirmó falsamente —sea por error, sea con fines artísticos independientes de la cuestión de la verdad literal— que existía Pegaso; y es en relación con el mismo mundo que el científico moderno afirma (2). Tiene importancia poder decir 'Los griegos afirmaban que existía Pegaso', o 'Los mitos griegos implican que exista Pegaso', pero podemos hacer semejantes afirmaciones sobre la historia de la cultura, e, inclusive reconocer que el mito de Pegaso tiene un valor estético, sin por ello relativizar la afirmación (2) con la suposición de una pluralidad de mundos. Como escribió Vicente Ferreira da Silva: "Estas formas diferentes de existir, introducidas por ciertos pensadores, son de una total puerilidad y nos llevan a conclusiones absurdas".

De aquí no debemos concluir que todo lo que existe ocupa espacio y tiempo. Por ejemplo, compatiblemente con las observaciones anteriores, podemos admitir la verdad del enunciado

(3) Existe el número 9^{9^9}

aun cuando el número en cuestión sea un objeto abstracto, ni espacial ni temporal. Algunos pensadores encontrarán dudosa la afirmación (3), fundándose en una doctrina según la cual sólo hay objetos concretos; otros, sin ser partidarios de esta doctrina en toda su generalidad, hallarán que (3) es dudoso fundándose en razones vinculadas con el hecho de que el número total de las colecciones posibles de las partículas mínimas del universo es menor que 9^{9^9}; finalmente otros, incluyendo los que aceptan las verdades de la aritmética como verdades literales, aceptarán (3) como obviamente verdadero. Los que dudan de (3) y también los que lo aceptan entienden la palabra 'existe', tal como figura en (3), en el mismo sentido que en (1) y (2). La diferencia entre los distintos ejemplos no reside en el verbo 'existe' sino en los sustantivos 'Bucé-

falo', 'Pegaso' y '9^{9^9}'. Negar que existe Pegaso significa que el objeto no se halla en el espacio y en el tiempo; pero tal dependencia respecto del espacio y del tiempo sólo surge porque, si existiese Pegaso, sería un objeto espaciotemporal. Afirmar o negar que existe 9^{9^9} es afirmar o negar que 9^{9^9} se encuentra en la serie de los números, porque si existe 9^{9^9}, es un objeto de esa índole.

Ciertos filósofos consideran que la palabra 'existe' se usa en un sentido cuando se la aplica a objetos espaciotemporales, y en otro esencialmente diferente cuando se la aplica a objetos abstractos. Hasta usan palabras diferentes: 'existe' en un caso y 'subsiste' en el otro. Esta tendencia se debe, quizá, a la idea de que los métodos de conocimiento son muy diferentes en uno y otro caso, siendo la observación de la naturaleza un método esencial para determinar la existencia de un objeto perteneciente al espacio y al tiempo, pero inútil en el caso de un objeto abstracto. Esa idea de que hay una diferencia metodológica fundamental es, sin embargo, debatible, ya que a veces también es necesaria la observación de la naturaleza para determinar la existencia, o 'subsistencia', de un objeto abstracto. Por ejemplo, introduzcamos la expresión 'fiebre paranaense' como abreviación de la expresión 'la enfermedad que aniquiló a la mayoría de los habitantes de Curitiba en el año 1903'. La cuestión de si existe semejante enfermedad —no la cuestión de si se encuentran casos de fiebre paranaense, sino la cuestión misma de si existe tal enfermedad incluso como objeto abstracto— sólo se resuelve por medio de observaciones de la naturaleza. Un examen de la historia de Curitiba revela, en efecto, que *ninguna* enfermedad aniquiló a la mayoría de los habitantes de esa ciudad en 1903 y, por esto, que la fiebre paranaense no existe, ni 'subsiste' siquiera como objeto abstracto.

Muchos filósofos admiten, además de los objetos abstractos y de los objetos concretos en el espacio y en el tiempo, ciertos objetos concretos que se asemejan más o menos a los que existen en el espacio y en el tiempo, pero que son sólo posibles, y no actuales. Estos filósofos imaginan un dominio de objetos concretos más amplio que el mundo real. Bucéfalo y Pegaso pertenecerían ambos a

este dominio más extenso; pero Bucéfalo tiene entre sus propiedades, la de estar actualizado, mientras que Pegaso no tiene esta propiedad. Estos filósofos limitan la palabra 'existir' a los objetos actualizados, y para referirse a los objetos concretos en general, actualizados o no, así como a los objetos abstractos, emplean la palabra 'ser'.

Uno de los propósitos de esta vasta multiplicación de objetos es, sin duda, poder tratar enunciados del género de 'Pegaso no existe' como enunciados sobre objetos. Si no existe en modo alguno, un objeto Pegaso ¿cómo pueden tener sentido la palabra 'Pegaso' y sus contextos, e incluso 'Pegaso no existe'? ¿Cómo decir de Pegaso que no existe, si no hay un objeto Pegaso que no existe? No obstante, debiera ser notorio que la extensión del universo hasta el punto de incluir objetos posibles, no es un remedio, dado que podemos reproducir el problema en relación con el nuevo universo más amplio. En lugar de 'Pegaso no existe' podemos proponer el ejemplo 'La esposa soltera de Pegaso no existe'. La esposa soltera de Pegaso ni siquiera se encuentra en el presunto dominio de los objetos posibles.

No hay nada paradójico en el enunciado de que Pegaso no existe, de que no hay tal objeto. No es un enunciado sobre cierto objeto Pegaso; y esto no debe sorprendernos, porque ya nos hemos acostumbrado a ver figurar sustantivos, y aun nombres, en forma no designativa. Y en cuanto a la cuestión del sentido, es claro que la palabra 'Pegaso' conserva todo su sentido independientemente de la cuestión de la existencia. No es preciso que las palabras sean nombres, ni siquiera sustantivos, para que posean sentido. La supuesta paradoja de la inexistencia surge de la confusión entre sentido y designado.

§ 39. *El significado ontológico del principio de aplicación*

La cuestión general '¿Qué existe?' —centro, como acaba de verse, de inumerables desacuerdos filosóficos— está íntimamente ligada con el significado de la notación lógica de cuantificación. Como el

cuantificador tiene el sentido 'cualquiera que sea x', el cuantificativo hace una afirmación sobre todo lo que hay. La teoría lógica de la cuantificación es, sin embargo, independiente de la elección entre las diversas ontologías; es decir, no depende de las diversas respuestas a la pregunta '¿Qué existe?'. Las verdaderas cuantificacionales siguen siendo las mismas cualquiera que sea el género de objetos, concretos o abstractos, actuales o posibles, que se admitan en el universo del discurso, y sin que importe la exigüidad o multiplicidad de objetos, con tal que haya al menos uno.

Pero si la elección de una ontología es indiferente a las verdades cuantificacionales, no es en cambio indiferente a todas las verdades construídas con el auxilio de la cuantificación. El cuantificativo

$$(x) \sim (x \text{ resulta de la multiplicación, } 9^9 \text{ veces, de 1 por 9}),$$

que niega el (3) del § 38, sería falso según la ontología implícita en la aritmética clásica, y verdadero según otros puntos de vista antes mencionados. El cuantificativo

$$(x) \sim (x \text{ relincha} \,.\, x \text{ vuela})$$

es verdadero según normas que acaso sean las más razonables, pero sería falso según la ontología que reconoce un objeto Pegaso en un dominio de objetos concretos posibles.

La ontología que una persona acepta, o que un contexto dado presupone, no se revela con el solo examen del vocabulario; sabemos, en efecto, que los sustantivos de un vocabulario pueden usarse de modo no designativo sin por ello privárselos de sentido. El uso de la palabra 'Pegaso' no implica la aceptación de Pegaso; ni el mero uso de los signos '9' ó '9^{9^9}' implica que haya objetos abstractos, números tales como 9 y 9^{9^9}. No es el sólo uso de un sustantivo, sino su uso designativo, el que nos compromete a aceptar el objeto designado por el sustantivo. Para determinar si un sustantivo se usa designativamente en un contexto dado, debemos mirar más allá del sustantivo examinando el comportamiento de los pronombres.

Hemos visto (§ 35) que el uso de un pronombre en el lugar de una figuración no designativa produce a menudo una expresión sin

sentido; pero esto no ocurre siempre. En correspondencia con el enunciado (verdadero) 'Nadie vió a Pegaso', por ejemplo, tenemos la matriz 'nadie vió x', que tiene pleno sentido y cabe en los contextos cuantificacionales de manera normal, aun cuando 'Pegaso' figure, en el enunciado dado, como en cualquier otro, de manera no designativa.

Para ver cómo la inexistencia del designado de un sustantivo se registra en el comportamiento de los pronombres, recurriremos al principio de aplicación (§ 28), pues éste es el principio que relaciona un cuantificativo con su caso, construído por el uso de un nombre. El contenido del principio es que lo que rige para todo objeto rige para el objeto designado por el nombre en cuestión; y está claro que este principio pierde su justificación cuando se lo aplica a un no-nombre, como 'Pegaso', o aun a una figuración no designativa de un nombre. Por ejemplo, de la verdad (N) del § 33, esto es,

(1) $$(x) \sim (y) \sim x = y,$$

no debe inferirse, por el principio de aplicación, el enunciado falso

(2) $$\sim (y) \sim \text{Pegaso} = y,$$

esto es, 'Pegaso es idéntico a algún objeto'.

Lo que nos compromete al reconocimiento del designado de un sustantivo dado no es, pues, el mero uso del sustantivo, sino su uso como blanco del principio de aplicación. Lo que nos compromete es la inferencia por aplicación, que consiste en borrar un cuantificador inicial y sustituir el pronombre por el sustantivo en cuestión.

Esto se torna especialmente claro cuando consideramos la inferencia por *generalización existencial*. Ésta consiste en la inferencia de una conclusión de la forma '$\sim (x) \sim fx$', esto es, 'Hay algún objeto x tal que fx', sobre la base de una premisa idéntica a la matriz representada por 'fx', excepto que contiene cierto sustantivo en los lugares donde la matriz contiene 'x' como pronombre libre. La idea de esta inferencia es que lo que rige para el objeto designado por el sustantivo en cuestión rige para algún objeto; y está claro que la

inferencia pierde su justificación cuando el sustantivo no designa Por ejemplo de la verdad

(3) $(y) \sim \text{Pegaso} = y,$

esto es, 'No hay ningún objeto al cual sea idéntico Pegaso', no debemos inferir

(4) $\sim (x) \sim (y) \sim x = y,$

esto es, 'Algún objeto es distinto de todo objeto', que es la negación de (1).

Obsérvese que la aplicación y la generalización existencial son aspectos de un único principio. El condicional de antecedente (1) y consecuente (2), por ejemplo, es el mismo condicional cuyo antecedente es (3) y cuyo consecuente es (4):

(5) $\sim ((x) \sim (y) \sim x = y \,.\, (y) \sim \text{Pegaso} = y) \,.$

La falsedad de (5) es la que refleja el hecho de que 'Pegaso' no designa.

El principio de aplicación (o de generalización existencial) es un "principio" sólo por cortesía, como acaba de evidenciarse. Sólo es válido en el caso en que el sustantivo en cuestión sea un nombre. En lugar de ser un principio lógico, es, simplemente, el contenido lógico de la idea de que un sustantivo dado designa. Y esta idea no puede, en general, fundarse lógicamente. Por ejemplo, la cuestión de que 'Pegaso' designe compete a la ciencia natural.

Así se explica que no hayamos ubicado el "principio de aplicación" en la teoría pura de la cuantificación (cf. § 28). También se advierte la importancia teórica del hecho, que estableceremos más adelante, que *todo uso de nombres y del "principio de aplicación" es teóricamente dispensable*, ya que los nombres pueden eliminarse de todos los contextos por paráfrasis. Pero para poder demostrar esta afirmación tenemos que estudiar la teoría de la descripción.

§ 40. *Descripción*

Llamemos *descriptivos* los sustantivos que comienzan por los artículos 'el' o 'la' en singular; por ejemplo de la manera siguiente:

el autor de *Os Sertões**,

esto es,

el único objeto x tal que x escribió *Os Sertões;*

en símbolos,

(1) (ιx) x escribió *Os Sertões*

En general, un descriptivo será un nombre, esto es, designará si, y solamente si la matriz que sigue al prefijo '(ιx)' (o '(ιy)', etc.) es satisfecha por un único objeto; y éste será el objeto designado. Como *Os Sertões* tiene un autor y sólo uno, el descriptivo (1) es su nombre. Otro nombre del mismo objeto es 'Euclides da Cunha'; tenemos, pues, la identidad

Euclides da Cunha = (ιx) x escribió *Os Sertões.*

Consideremos ahora un descriptivo cualquiera, representándolo esquemáticamente por '$(\iota x)\, fx$', y cualquier matriz que contiene el descriptivo, representándola esquemáticamente por '$g\,(\iota x)\, fx$'. Si el descriptivo designa, la matriz representada por '$g\,(\iota x)\, fx$' puede ser parafraseada sucesivamente de la siguiente manera:

Hay un único objeto y tal que fy, y este objeto es tal que gy,

$\sim (y) \sim (gy$. y es el único objeto tal que $fy)$,

$\sim (y) \sim (gy$. fy . ningún objeto x excepto y es tal que $fx)$.

(2) $\sim (y) \sim (gy \,.\, fy \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim x = y))$.

Se sigue que todo uso de descriptivos puede evitarse o puede

* *Os Sertões* es una novela clásica de la literatura brasileña, de la cual es autor Euclides da Cunha. (N. del T.)

considerarse como una mera abreviación, ya que el contexto del descriptivo puede desarrollarse en la forma (2). El descriptivo desaparece y no surge ningún otro sustantivo para reemplazarlo, excepto los pronombres [17].

La justeza de este modo de paráfrasis depende de la suposición de que el descriptivo designa. Pero en el lenguaje diario estamos habituados a usar los descriptivos sólo cuando pensamos que designan; por esto, la cuestión de la correspondencia entre (2) y el sentido intuitivo de 'g (ιx) fx' pierde su importancia cuando la descripción no designa. Por consiguiente, todo uso de descriptivos puede considerarse como una abreviación, en la forma en que lo hemos sugerido.

Esta versión está afectada por dos ambigüedades que es preciso eliminar. Puede ocurrir que el contexto representado por 'g (ιx) fx' contenga dos descriptivos. El resultado de eliminar el primero de estos descriptivos de la manera (2), eliminando después el otro descriptivo de la misma manera, diferiría —al menos en cuanto a la notación— del resultado de eliminar los descriptivos siguiendo el orden opuesto. La otra dificultad estriba en que, dado un descriptivo dentro de una matriz que forme parte de otra matriz, no sabemos si es la matriz menor o la mayor la que debe desempeñar el papel del 'g (ιx) fx' de la explicación anterior. Estas ambigüedades son lógicamente indiferentes cuando los descriptivos designan; sin embargo, una convención por la cual sólo se establece una abreviatura debe ser tal que la expresión originaria sea reproducible unívocamente en su propia notación. Es fácil someter nuestra convención a las especificaciones adicionales necesarias, y ello de la siguiente manera: la matriz que desempeña el papel de 'g (ιx) fx' no debe contener ninguna matriz menor que también contenga el descriptivo en cuestión, y no debe contener ningún otro descriptivo a la izquierda del descriptivo en cuestión.

Está claro que, en lugar de los pronombres 'x' e 'y' empleados en esta explicación pueden admitirse otros pronombres, y que el pro-

[17] Esta eliminación de los descriptivos se debe a Russell (1905). El primer tratamiento exacto de los descriptivos fue quizá el de Frege (1893).

nombre que desempeña el papel del 'y' de (2) tiene que ser un pronombre que no figure en la matriz representada por '$g\ (\iota\ x)\ fx$'. Para garantizar que la abreviatura pueda desarrollarse unívocamente hasta la notación misma podemos estipular, además, que el pronombre que desempeña el papel de 'y' sea alfabéticamente el primer pronombre que no figura en la matriz representada por '$g\ (\iota\ x)\ fx$'.

Tenemos dos maneras de decir que y es $(\iota\ x)\ fx$ (imaginando una matriz cualquiera en lugar de 'fx'). Una es '$y = (\iota\ x)\ fx$' y la otra, correspondiente a las palabras 'y y sólo y es tal que fy', es '$fy\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = y)$'. Los condicionales recíprocos que ligan ambas formulaciones son fáciles de establecer sobre la base de las teorías de la identidad y de la cuantificación.

(O) $\sim (y = (\iota\ x)\ fx\ .\ \sim (fy\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = y)))\ .$

Demostración:

(a) $\sim (z = y\ .\ fz\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = z)\ .\ \sim (fy\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = y)))$ (J)

(b) $\sim (y = z\ .\ \sim z = y)$ (M)

(c) $\sim (y = z\ .\ fz\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = z)\ .\ \sim (fy\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = y)))$ De (a) y (b) por (i)

(d) $\sim (\sim (z) \sim (y = z\ .\ fz\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = z))\ .\ \sim (fy\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = y)))$ De (c) por (iv) y (v).

(O) Abreviatura de (d).

(P) $\sim (fy\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = y)\ .\ \sim y = (\iota\ x)\ fx)\ .$

Demostración:

(a) $y = y$ (K)

(b) $\sim ((z) \sim (y = z\ .\ fz\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = z))\ .\ \mathrm{a}\ .\ fy\ .\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = y))$ (A)

(c) $\sim (\sim y = (\iota\ x)\ fx\ .\ \mathrm{a}\ .\ fy\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim x = y))$ Abreviatura de (b).

(P) De (a) y (c) por (i).

Decir que el objeto $(\iota x)fx$ existe es, naturalmente, decir que el descriptivo designa. La condición de existencia de $(\iota x)\,fx$ es, pues, que haya un único objeto y tal que fy; esto es,

$$\sim (y) \sim (fy \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim x = y)) \,.$$

Pero, en vista del resultado anterior, esta formulación equivale a

(3) $$\sim (y) \sim y = (\iota x)\, fx \,.$$

Por lo tanto, podemos leer (3) de la manera 'Existe $(\iota x)\, fx$', o '$(\iota x)\, fx$ existe'. Literalmente, (3) dice 'Algún objeto es idéntico a $(\iota x)\, fx$' .

El principio de aplicación depende, como hemos visto (§ 39) de la hipótesis de que el sustantivo en cuestión designa. Pero ahora, debido a la formulación (3) de existencia, podemos expresar explícitamente el principio de aplicación en todos los casos en que el sustantivo es un descriptivo; y podemos demostrar el principio, en tales casos, sobre la base de las teorías de la identidad y de la cuantificación. El principio a demostrar es que todos los condicionales de la forma

Si $(\iota x)\, fx$ existe, y $(y)\, gy$, entonces $g\,(\iota x)\, fx$

son lógicamente válidos. Esto es,

(Q) $$\sim (\sim (y) \sim y = (\iota x)\, fx \,.\, (y)\, gy \,.\, \sim g\,(\iota x)\, fx) \,.$$

Demostración:

(a) $\sim (\sim (gy \,.\, fy \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim x = y)) \,.\, gy$ (b) $.\, y = (\iota x)\, fx)$
De (O) por (i)

(b) $\sim ((y)$ a $.\, (y) \sim (gy \,.\, fy \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim x$ (b) $= y)) \,.\, \sim$
$(y) \sim (gy \,.\, y = (\iota x)\, fx))$ (C)

(c) $\sim ((y)$ a $.\, \sim g\,(\iota x)\, fx \,.\, \sim (y) \sim (gy \,.\, y =$ (b) $(\iota x)\, fx))$
Abreviatura de (b)

(d) $\sim ((y) \sim (gy \,.\, y = (\iota x)\, fx) \,.\, (y)\, gy \,.\, \sim (y) \sim y =$
$(\iota x)\, fx)$ (C)

(Q) De (a), (c) y (d) por (i) y (iv) .

§ 41. *El pronombre como único sustantivo*

Cualquier nombre, o cualquier sustantivo del género de 'Pegaso', con pretensiones de desempeñarse como nombre, puede ser transformado en un descriptivo si aún no tiene tal forma. Ni siquiera es menester buscar trabajosamente una matriz para emplear en el descriptivo, sino que podemos recurrir al método artificial siguiente. Consideremos, por ejemplo, el nombre 'Europa', y entendamos el verbo 'europeizar' en el sentido de 'ser Europa'. En tal caso podremos considerar este verbo como fundamental, en lugar de aceptar el nombre como fundamental; y después podremos prescindir de este nombre, usando en su lugar el nombre descriptivo '(ιx) x europeíza'. Esta palabra 'europeíza', no es nombre, porque no lo usamos en los lugares que admiten pronombres. Inclusive, si existe el atributo de estar europeizado, la palabra 'europeíza' no lo designa; lo que designaría este atributo sería otra palabra, que a su vez puede reducirse a un descriptivo por el mismo método artificial. Este método artificial sirve, pues, para evitar todos los nombres que no son descriptivos y, de hecho, todos los sustantivos que no son descriptivos o meros pronombres.

Con semejante transformación no se pretende soslayar el supuesto de la existencia de objetos. El objeto Europa, por ejemplo, se conserva, y es designado por el descriptivo '(ιx) x europeíza'. Tampoco se pretende, con dicha transformación, analizar la naturaleza de los objetos de una manera más completa; la idea no analizada de Europa sigue en funciones, con pocas diferencias, dentro del sentido del nuevo verbo 'europeizar'. Lo que se pretende con la transformación en cuestión es reducir todos los nombres u otros sustantivos (con excepción de los propios pronombres) a un tipo normal: el de los descriptivos. La ventaja es considerable: el análisis (3) del enunciado existencial singular, de la forma 'existe ...' o '... existe', así como el establecimiento del principio de aplicación en la forma (Q), se vuelven adecuados en forma general.

Pero ahora podemos dar un paso más: eliminar todos los nom-

bres y, además, todos los demás sustantivos con excepción de los pronombres, pues ya sabemos cómo eliminar los descriptivos. Los descriptivos se mantienen sólo como abreviaturas convenientes, y se los puede dejar de lado en las consideraciones teóricas.

Ya antes sabíamos que el pronombre era en todos los casos el camino principal de la referencia a los objetos: esto se vió al considerar las figuraciones no designativas de nombres (cf. §§ 34, 35, 39), y también con relación al hecho de que algunos objetos, según la matemática clásica, tienen que carecer de nombres y deben ser tratados tan sólo por medio de pronombres (cf. § 17). Pero ahora el pronombre pasa, de principal, a ser el único camino de referencia al objeto.

Un resultado de estas consideraciones es que la teoría de la cuantificación no necesita ser suplementada con un principio de aplicación. En general, es obvio que las consideraciones sobre la relación entre signo y objeto, o entre el lenguaje y la realidad, se simplifican considerablemente. Todos los objetos siguen como antes, pero el contacto entre los objetos y el lenguaje se concentra en el pronombre. La ontología a que nos compromete un uso determinado del lenguaje consta de la totalidad de los objetos abarcados por el cuantificador.

IV. Clase, relación y número

§ 42. *Atributos y clases*

El uso de términos generales, tales como 'hombre' o 'azul', o de términos abstractos, como 'libertad' o '9', no basta para obligarnos a reconocer la existencia de objetos abstractos. Como ya quedó en claro, la cuestión de nuestras presuposiciones ontológicas descansa sobre el uso *designativo* de los términos de ese género, y depende finalmente de nuestra manera de usar los pronombres y los cuantificadores. En efecto, como acabamos de ver, toda consideración de nombres y de la relación de designación termina por ser prescindible, y la cuestión de las presuposiciones ontológicas se reduce a la cuestión del dominio que ha de abarcar el cuantificador.

Ocurre, sin embargo, que la matemática depende del reconocimiento de objetos abstractos tales como números, funciones, relaciones, clases y atributos. Los objetos abstractos de cuyo reconocimiento depende la matemática son, de hecho, reducibles a una parte que sólo incluye las clases o atributos. Los objetos abstractos de algún tipo siempre deben ser admitidos en el dominio del cuantificador.

El nominalista que sólo pretenda reconocer objetos concretos debe condenar la matemática clásica, o bien debe considerarla como una máquina que es útil aun cuando haga uso de ideogramas con la forma de enunciados que implican una ontología ficticia. Tiene importancia que examinemos los fundamentos de la matemática, cualquiera sea el dogma ontológico que eventualmente adoptemos.

Debemos, pues, comenzar por tolerar provisionalmente las clases o atributos. ¿En qué difieren las clases de los atributos? Es habitual describir la clase como "mero agregado", imaginándola con una analogía espacial y como conteniendo sus miembros dentro de sí; en cambio, el atributo suele ser imaginado más bien por analogía con un poder inherente a los objetos que lo tienen o como una marca estampada en los objetos. Esta apelación a analogías opuestas no tiene sentido. Una clase, aun de cosas concretas y espaciales, no es concreta ni espacial. Una clase de cosas espaciales no es la cosa espacial formada por la fusión de los miembros de la clase. Esto se deduce de la comparación de las clases siguientes: la una tiene por miembros los trece países continentales de Sudamérica, y la otra tiene sólo dos miembros, siendo uno de ellos Brasil y el otro el territorio restante del continente. La cosa espacial que consta de los trece miembros de la primera clase es el continente, y la cosa espacial que consta de los dos miembros de la segunda clase es el continente mismo. Sin embargo, las clases no pueden ser simplemente el continente, porque ambas difieren entre sí: por ejemplo, en la primera figura Paraguay como miembro, y en la segunda no. Las dos clases, caso contrario al del continente, deben ser admitidas como objetos de índole abstracta e intangible.

Quedan pocas causas de distinción entre clase y atributo, o entre ser miembro de una clase y tener un atributo. Si hay una diferencia, es sólo ésta: los atributos pueden diferir entre sí, aun cuando sean atributos de las mismas cosas, mientras que las clases son siempre idénticas cuando tienen los mismos miembros.

A veces se encuentra la opinión de que la idea de atributo (o propiedad) es más intuitiva que la de clase, y que la idea de clase debe derivar de la de atributo. La derivación no presenta gran dificultad [18], pero la idea de que semejante inferencia sea ventajosa es bastante curiosa. Acaso se funde en una confusión entre atributo y expresión verbal. Es cierto que, para especificar una clase, comúnmente debemos presentar una matriz satisfecha por los miembros

[18] Véase Whitehead y Russell, *Principia Mathematica*, *20, así como mi ensayo "Whitehead and the Rise of Modern Logic".

de la clase y sólo por ellos; pero a este respecto las clases y los atributos son semejantes, pues la determinación de un atributo también depende, por lo común, de la presentación de una matriz satisfecha por los objetos que poseen el atributo, y sólo por ellos. La matriz no es el atributo.

Las clases, por ser objetos abstractos, son menos claras y familiares de lo que se podría desear; pero los atributos son todavía más oscuros, pues la única diferencia entre clases y atributos reside, como ya lo hemos observado, en la condición de identidad, y a este respecto las clases son mucho más claras que los atributos. Dos matrices determinan la misma clase cuando son satisfechas por los mismos objetos; pero ¿en qué condiciones determinan las matrices el mismo atributo?

Por lo común no se ofrece ningún criterio al respecto. El único que conozco es el siguiente: las matrices determinan el mismo atributo si, y solamente si son lógicamente equivalentes. Pero este criterio conduce a resultados embarazosos. Consideremos los atributos determinados por las respectivas matrices

(1) $x >$ número de planetas,

(2) $x > 9$;

esto es, el atributo de exceder el número de planetas y el atributo de exceder 9. Como (1) y (2) no son lógicamente equivalentes, se sigue que los atributos no serán idénticos. El enunciado

(3) El atributo de exceder el número de planetas = el atributo de exceder 9

será, pues, falso. Sin embargo, una sustitución dentro de la identidad verdadera

El atributo de exceder 9 = el atributo de exceder 9

sobre la base de la identidad verdadera

El número de planetas = 9

conduce a (3). Es necesario concluir que la figuración de '9' en el

contexto 'el atributo de exceder 9' no es puramente designativa (cf. § 34). Del mismo modo, más generalmente, tenemos que concluir que las figuraciones de nombres dentro de los nombres de atributos no son en general, designativas, y que las posiciones que ocupan no pueden ser ocupadas, en general, por pronombres. Las expresiones del tipo de las que especifican atributos no son, en general, contextos accesibles a pronombres referentes a cuantificadores anteriores. Es claro que esto constituye una restricción fundamental al uso de atributos. Es, en particular, una restricción que hace que los atributos sean inadecuados para las necesidades de la matemática y aun como base para la introducción de las clases.

El único recurso sería adoptar otra norma de identidad de atributos, una norma que no se funde en la equivalencia lógica. Pero ¿cuál es la naturaleza de esta norma diferente? Y si se la aceptara ¿seguirían siendo los atributos tan intuitivos como las clases?

Tal vez exista algún motivo para sostener que los atributos son más intuitivos que las clases: a saber, los atributos son propiedades o cualidades sensibles, tales como el color y el sonido. Se puede sostener que estos atributos son a veces distintos aunque sean poseídos por los mismos objetos; y aún es posible sostener que la dificultad señalada en el caso de la matriz '$x > 9$' no surge si se considera que esta matriz no es una de las matrices a que corresponden esos atributos intuitivos. Pero semejante dominio de atributos especiales, no correspondientes a matrices en general, no bastaría para fines matemáticos ni para la fundación de una teoría general de las clases. Por este motivo, no viene al caso en el análisis que estamos haciendo.

§ 43. *Pertenencia e identidad*

Comenzaremos directamente con la noción de clase, dejando de lado su variante, la noción de atributo. Para decir que un objeto x es miembro de una clase y, o que x *pertenece* a y, la notación usual

es '$x \varepsilon y$'; 'ε' es la inicial del verbo griego 'εστί' *. Ahora tenemos que formular los principios fundamentales que rigen este nuevo vínculo lógico, la ligadura de *pertenencia*.

Un principio que surge de las consideraciones anteriores es el de que las clases que tienen los mismos miembros son idénticas; esto es, 'Cualesquiera que sean x e y, si (z) $(z \varepsilon x$ si, y solamente si $z \varepsilon y)$ entonces $x = y$.' Este principio puede escribirse de la siguiente manera:

(1) $$(x)\ (y) \sim ((z)\ (z \varepsilon x \equiv z \varepsilon y)\ .\ \sim x = y)$$

usando '$\equiv$' en el sentido 'si y solamente si' según la convención de abreviatura

D1. $$\text{'}p \equiv q\text{'} \quad por \quad \text{'}\sim (p\ .\ \sim q)\ .\ \sim (q\ .\ \sim p)\text{'}\ .$$

(Con la letra 'D' se quiere sugerir 'definición').

Una aparente excepción al principio (1) surge en el caso en que x e y no son clases; en este caso, x e y no poseen miembros y la condición '(z) $(z \varepsilon x \equiv z \varepsilon y)$' se cumple en forma vacía, aun cuando no queramos concluir de este hecho que x e y son siempre la misma cosa. Parece que debemos limitar (1) con la condición adicional de que x e y sean clases. Esta condición no podría ser formulada únicamente por medio de las notaciones que tenemos a mano, esto es, las de negación, conjunción, cuantificación, identidad y pertenencia.

Una solución parcial de este problema consiste en variar un poco la noción de pertenencia, de manera que '$z \varepsilon y$' cobre el sentido de 'z es miembro de y si y es clase, y $z = y$ si y no es clase'. Hecho esto, (1) se conserva verdadero aun en el caso en que x e y no son clases; y en tal caso (1) afirma que si las cosas (en rigor, la cosa) que son idénticas a x son idénticas a y, luego x es idéntico a y.

Pero la solución propuesta sigue siendo parcial, pues nos queda por incluir el caso en que x es clase e y no lo es (o viceversa). En este caso, el antecedente '(z) $(z \varepsilon x \equiv z \varepsilon y)$' dentro de (1) tiene el sentido '(z) $(z \varepsilon x \equiv z = y)$'; esto es, la clase x tiene como miembros

Tercera persona del presente del indicativo del verbo ser: 'es' (N. del E.)

exactamente las cosas idénticas a y; en una palabra, la clase x tiene a y por único miembro. (1) nos obligaría a concluir de este antecedente que $x = y$, aunque x sea clase e y no. Pero se puede evitar esta dificultad negando el antecedente; esto es, rehusando reconocer la existencia de una clase x cuyo único miembro sea una no-clase y.

La exclusión de clases de este tipo no engendra dificultades en el uso de la teoría de las clases, porque ocurre que una no-clase y es adecuada a todos los usos de una clase cuyo único miembro sea y. Es importante conservar, junto a una clase w, otra clase cuyo único miembro sea w [19]; pero ocurre que no tiene ninguna utilidad conservar, junto con una no-clase y, una clase cuyo único miembro sea y.

Acabamos de adoptar las siguientes convenciones: (a) entenderemos '$z \varepsilon y$' en la forma '$z = y$' cuando y no es clase, y (b) rechazaremos cualquier clase cuyo único miembro sea una no-clase [20]. Estas mismas innovaciones pueden formularse de manera bien diferente: (c) convenimos en asimilar toda no-clase al universo de las clases, considerando una no-clase como clase cuyo único miembro es ella misma. (En esta formulación tendríamos que adoptar, naturalmente, otra palabra en lugar de 'no-clase'; por ejemplo, 'individuo'.) Las convenciones (a) y (b) por una parte, y la convención (c) por la otra, constituyen simplemente sendas formulaciones de un mismo sistema. Pero la formulación (c) representa un punto de vista más conveniente, pues según ella todo objeto se torna uniformemente clase, y la notación '$z \varepsilon y$' conserva uniformemente el sentido 'z es miembro de y'.

Estos refinamientos, sea que se los formule de la manera (a)-(b) o de la manera (c), tienen por consecuencia restituir a (1) su plena generalidad. Ahora, por (1) vemos que '$(z)\ (z \varepsilon x \equiv z \varepsilon y)$' equivale a '$x = y$'. (1) establece como válido el condicional cuyo antecedente

[19] Como lo señaló Frege en 1879.

[20] Este rechazo puede considerarse como una convención consistente en limitar la palabra 'clase' de manera tal que no abarque ciertos casos cubiertos anteriormente.

es '$(z)\ (z \varepsilon x \equiv z \varepsilon y)$' cuyo antecedente es '$x = y$'. El condicional inverso

(2) $\sim (x = y\ .\ \sim (z)\ (z \varepsilon x \equiv z \varepsilon y))$

es fácil de demostrar.

Demostración:

(a) $z \varepsilon x \equiv z \varepsilon x$ Por (i)
(b) $\sim (x = y\ .\ (z)\ \mathrm{a}\ .\ \sim (z)\ (z \varepsilon x \equiv z \varepsilon y))$ (J)
(2) De (a) y (b) por (i) y (iv).

Se sigue que la forma de notación '$x = y$' es prescindible, puesto que se admite la paráfrasis '$(z)\ (z \varepsilon x \equiv z \varepsilon y)$'. La notación de la identidad puede considerarse como mera abreviatura conveniente.

D2. '$x = y$' *por* '$(z)\ (z \varepsilon x \equiv z \varepsilon y)$'.

(Naturalmente, esta convención se adopta también cuando en los lugares de 'z' e 'y' aparecen otros pronombres cualesquiera; y podemos suponer que el tercer pronombre, que desempeña el papel de 'z', se escoge sobre la base de los otros dos según una regla alfabética arbitraria.)

En virtud de D2, el principio (1) puede demostrarse inmediatamente, y adquiere la forma '$(x)\ (y) \sim (fxy\ .\ \sim fxy)$'. Además, el principio (K) sobre la identidad (§ 33) se torna igualmente demostrable.

(a) $y \varepsilon x \equiv y \varepsilon x$ Por (i)
(b) $(y)\ \mathrm{a}$ De (a) por (iv)
(K) Abreviatura de (b).

Pero (J), el otro principio sobre la identidad, debe ser conservado como principio, abreviado, acerca de la pertenencia. Según D2 es una abreviatura de

*1 $\sim ((z)\ (z \varepsilon x \equiv z \varepsilon y)\ .\ fx\ .\ \sim fy)\ .$

Las consecuencias (L), (M) y (N) se infieren como antes.

§ 44. *Matrices puras. Estructura y contenido*

Ciertas matrices, que podemos llamar *matrices puras de la teoría de las clases*, o más brevemente *matrices puras*, sólo constan de las notaciones de conjunción, negación, cuantificación y pertenencia, sin contenido adicional alguno. Estas matrices constan de matrices atómicas * '$x \varepsilon x$', '$x \varepsilon y$', '$y \varepsilon y$', '$y \varepsilon z$', etc., ligadas y elaboradas en forma variada por el uso de conjunción, negación y cuantificación. Algunas de estas matrices puras son enunciados; los llamaremos *enunciados puros* de la teoría de las clases. El más breve de ellos es el enunciado falso '$(x)\ x \varepsilon x$' (y sus variantes alfabéticas '$(y)\ y \varepsilon y$', '$(z)\ z \varepsilon z$', etc.).

Las aplicaciones de la lógica y de la matemática dependen del uso de los signos lógicos y matemáticos dentro de contextos *impuros*, o sea, que contienen también signos que no son lógicos ni matemáticos. Sigamos, por esto, imaginando matrices de todo género y no sólo matrices puras, en los lugares de 'p', 'q', 'fx', etc., dentro de las formas válidas (A)-(I) de la teoría de la cuantificación, e igualmente dentro de *1 y de las formas siguientes. En cambio, si nos contentásemos con considerar la teoría *pura* de las clases, dejando de lado todas las matrices impuras, entonces podríamos prescindir de *1 y adoptar en su lugar un caso particular del mismo, a saber, el enunciado

$$*1' \qquad (w)\ (x)\ (y) \qquad \sim ((z)\ (z \varepsilon x \equiv z \varepsilon y)\ .\ x \varepsilon w\ .\ \sim y \varepsilon w)\ .$$

Sobre la base de *1' y de la teoría de la cuantificación es posible (aunque de una manera un poco complicada) demostrar que toda matriz *pura* de la forma *1 es válida [21].

Cuando se afirma que la matemática se reduce a la lógica, se

* Un ente lógico suele denominarse *atómico* si, en el contexto considerado, se comporta como una unidad simple, a partir de la cual se construyen entes complejos (*moleculares*). (N. del T.)

[21] Cf. mi *Mathematical Logic*, §§ 29-30.

significa que todas las ideas que pertenecen a la aritmética y a las demás partes de la matemática pura son definibles sobre la base de la negación, de la conjunción, de la cuantificación y de la pertenencia (o bien, sobre la base de negación conjunta, cuantificación y pertenencia; cf. § 14). Podemos continuar la serie de definiciones y convenciones de la abreviación iniciadas por D1 y D2, de manera que toda matriz de la matemática pura se manifieste como la abreviatura de una matriz pura de la teoría de las clases; y en particular de manera que todo enunciado de la matemática pura (por ejemplo, '2 + 2 = 4', '2 + 2 = 5', el teorema del binomio, o el teorema de Fermat) se convierta en la abreviatura de un enunciado puro de la teoría de las clases. Veremos varias definiciones de esta serie en el curso del presente capítulo.

Entre las teorías de la composición y cuantificación por una parte, y la teoría de las clases por otra, hay puntos de contraste tan fundamentales, que puede proponerse que constituyan la línea divisoria entre la lógica en un sen ido estrecho y la matemática. En la lógica en este sentido restringido —o sea, en la teoría de la composición y de la cuantificación o, en una palabra, en la teoría de la deducción— las matrices están determinadas sólo en relación con su estructura externa, mientras que los componentes atómicos (por ejemplo, 'Socrates es mortal', o '*y* es mortal') están construídos con materiales no lógicos. Para facilitar el tratamiento de la estructura lógica de las matrices (incluídos los enunciados) hemos usado, en los capítulos I y II, los esquemas; pero las letras '*p*', '*q*', etc., y las combinaciones '*fx*', '*gxy*', etc., tenían que imaginarse sustituídas por matrices que contuviesen, por supuesto, algún material además de la mera estructura provista por las notaciones de conjunción, negación y cuantificación. En cambio, en la teoría de las clases, ciertas matrices atómicas se determinan de manera que sea posible fabricar matrices y enunciados íntegros dentro de la propia teoría. Quizá podamos decir que la lógica en el sentido estricto sólo provee la estructura, mientras que la teoría de las clases también suministra un contenido.

En otro sentido, la teoría de las clases posee contenido aun más

literalmente: la teoría exige que los objetos abarcados por los cuantificadores incluyan objetos de cierto género —clases— que formarán los objetos especiales de estudio de la teoría, mientras que la lógica en sentido restringido es indiferente a la naturaleza y aun a la multiplicidad de los objetos (con tal de que haya al menos uno: cf. § 39). A diferencia de la lógica en sentido estricto, la teoría de las clases implica una ontología. No implica una ontología exclusiva, pues no impone restricción alguna a la índole de los objetos restantes, los llamados "individuos"; pero implica una ontología positiva de las clases. Esta implicación de una ontología de objetos abstractos, aun siendo imprescindible para la matemática clásica, repugna a muchos pensadores.

Estas consideraciones dan fundamento a una división fundamental entre la teoría de las clases y la parte anterior de la lógica; y aun, como ya lo mencionáramos, justifican la restricción del término 'lógica' a la parte anterior. Según este uso, el concepto de verdad *cuantificacional* bastaría para agotar la verdad *lógica*. Las verdades (K)-(N), *1', etc., llamaríanse así *matemáticas* en lugar de lógicas. Algo análogo ocurriría con los conceptos de validez, implicación y equivalencia. Dejaría de ser correcto decir que la matemática se reduce a la lógica; en lugar de esto tendríamos que decir que la matemática se reduce a aquel dominio fundamental de la matemática que constituye la teoría de las clases. Dejemos sin decidir esta cuestión terminológica.

§ 45. *Existencia de clases*

El principio según el cual las clases que constan de los mismos miembros son idénticas es, desde el punto de vista de la existencia de las clases, un principio negativo, pues limita a uno el número de las clases que poseen un surtido dado de miembros. Todavía tenemos que formular los principios que sustentan la existencia de clases. El principio natural es el de que dada una matriz cualquiera cuyo pronombre libre es 'x', hay una clase cuyos miembros son exacta-

mente los objetos x que satisfacen a la matriz dada. En este principio nos fundamos cuando usamos el prefijo 'la clase de todos los objetos x tales que ...'. Suele suponerse que este prefijo siempre sirve para nombrar una clase.

El principio en cuestión, llamado de *abstracción*, afirmaría la verdad de todo enunciado o, más generalmente, la validez de toda matriz de la forma

$$(1) \qquad \sim (y) \sim (x) \, (x \, \varepsilon \, y \equiv fx) \, ,$$

esto es, 'Hay una clase y a la que pertenece cualquier objeto x si, y solamente si fx'. Con todo, el principio es falso. Hay enunciados de la forma (1) que son falsos, y más, su falsedad es demostrable dentro de la teoría de la cuantificación. El más sencillo de los enunciados de este género es

$$(2) \qquad \sim (y) \sim (x) \, (x \, \varepsilon \, y \equiv \sim x \, \varepsilon \, x) \, .$$

Su negación se demuestra de la siguiente manera:

$$(3) \qquad (y) \qquad \sim (x) \, (x \, \varepsilon \, y \equiv \sim x \, \varepsilon \, x) \, .$$

Demostración:

(a) $\sim ((x) \, (x \, \varepsilon \, y \equiv \sim x \, \varepsilon \, x) \, . \sim (y \, \varepsilon \, y \equiv \sim y \, \varepsilon \, y))$ (A)

(3) De (a) por (i).

Intuitivamente, el argumento es el siguiente: no existe una clase K formada precisamente por las clases que no son miembros de sí mismas, pues tal clase sería miembro de si misma sí, y solamente si no fuese miembro de sí misma [22].

Por lo tanto, por más intuitivo que sea el principio de abstracción, debemos someterlo a ciertas restricciones. Se conocen varias maneras de restringir el principio para evitar las contradicciones sin empobrecer demasiado la teoría de las clases [23]. Todos esos

[22] Debido a Russell (1903, cap. 10).

[23] Las dos primeras tentativas en este sentido fueron las de Russell ("teoría de los tipos")y Zermelo, ambas de 1908. La teoría que presento en el texto es más parecida a la de Zermelo, pero ha sido influída esencialmente por la teoría de von Neumann (1926). Para una comparación de éstas y otras teorías, véase

modos son bastante artificiales. En mi opinión, el más conveniente de ellos se funda en la idea (de von Neumann) de que ciertas clases no pueden pertenecer a clases. Llamemos *elementos* a todos los objetos que son miembros de clases: esto es, 'x es elemento' significa '$\sim (z) \sim x \varepsilon z$'. Con esto, el nuevo *principio restringido de abstracción* será el de que, dada cualquier matriz cuyo pronombre libre es 'x', existe una clase cuyos miembros son exactamente los *elementos* (en vez de 'objetos', como decíamos anteriormente) que satisfacen a la matriz. Se afirma con ello la validez de toda matriz, no de la forma (1), sino de la forma más especial

$$*2. \qquad \sim (y) \sim (x) (x \varepsilon y \equiv (fx \,.\, \sim (z) \sim x \varepsilon z)).$$

Este principio restringido de abstracción no conduce al enunciado falso (2). Cuando sustituimos 'fx' por '$\sim x \varepsilon x$' en *2, el resultado no es (2), sino

$$\sim (y) \sim (x) (x \varepsilon y \equiv (\sim x \varepsilon x \,.\, \sim (z) \sim x \varepsilon z)),$$

según el cual existe una clase K' formada justamente por los *elementos* que no son miembros de sí mismos. Esta clase K', a diferencia de la clase K, supuesta anteriormente, bien puede existir; la única restricción es que K' no puede ser elemento, o sea, que

$$(4) \qquad (y) \qquad \sim ((x) (x \varepsilon y \equiv (\sim x \varepsilon x \,.\, \sim (z) \sim x \varepsilon z)) \,.\, \sim (z) \sim y \varepsilon z).$$

Demostración:

(a) $\sim ((x) (x \varepsilon y \equiv (\sim x \varepsilon x \,.\, \sim (z) \sim x \varepsilon z)) \,.\, \sim (y \varepsilon y \equiv (\sim y \varepsilon y \,.\, \sim (z) \sim y \varepsilon z)))$ (A)

(4) De (a) por (i).

El principio originario de abstracción tiene, además de la consecuencia contradictoria (2), una infinidad de otras consecuencias contradictorias, más o menos parecidas a (2) pero más complicadas [24]. La restricción del principio de abstracción en la forma *2,

mi artículo "On existence conditions", así como mi *Mathematical Logic* pp. 164-166.

[24] Cf. mi *Mathematical Logic*, pp. 128-129.

aleja tales consecuencias. Pero, aun siendo seguro, el principio restringido es demasiado débil para garantizar todas las clases que deseamos, en ausencia de ciertos principios complementarios sobre la existencia de elementos. Dado un dominio de elementos, nuestro principio restringido de abstracción nos suministra todas las clases imaginables formadas por esos elementos; pero nuestro principio no garantiza la existencia de elemento alguno. Si no hubiese ningún elemento, ninguna clase tendría miembros; los propios individuos, por ser clases de un único miembro (cf. § 43), no existirían; el único objeto del universo sería la clase vacía 0, la clase sin miembros. Aun así, las matrices de las formas *1 y *2 seguirían siendo válidas [25]. Es preciso, por consiguiente, adoptar principios suplementarios para especificar qué objetos sean elementos. Pero podemos desarrollar una parte de la teoría de las clases antes de agregar tales principios. La parte en cuestión es importante aun cuando no contenga nada incompatible con un universo cuyo único objeto sea 0.

§ 46. *Abstracción*

El principio implícito en el uso del prefijo 'la clase de todos los objetos x tales que...' no es sostenible, como ya se ha visto. El nuevo principio restringido de abstracción sirve, no obstante, como base para el uso del prefijo modificado 'la clase de todos los *elementos* x tales que...'. Escribamos este prefijo brevemente en la forma '$\hat{x}$'. La notación '$\hat{x}fx$' (imaginando que una matriz ocupa la posición de 'fx') tiene el sentido de 'la clase y cuyos miembros son exactamente los objetos x tales que fx, y x es elemento'; en resumen,

$$\hat{x}fx = (\iota y)\,(x)\,(x \in y \equiv (fx\,.\,\sim(z) \sim x \in z)).$$

La notación de la forma '$\hat{x}fx$', llamada notación de la *abstracción*

[25] Esto fue señalado por Rosser (1941).

de clases, puede introducirse como abreviatura. Antes tenemos que introducir la notación de descripción. En el § 40 ya dimos a conocer la definición contextual de descripción:

D3. $'g(\iota x)fx'$ *por* $'\sim (y) \sim (gy \,.\, fy \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim x = y))'$,

donde 'fx', 'gx', etc., se sustituyen por matrices sometidas a las restricciones señaladas en el § 40. Ahora el *abstractivo* se introduce como abreviatura de un descriptivo:

D4. $'\hat{x}fx'$ *por* $'(\iota y)\,(x)\,(x \,\varepsilon\, y \equiv (fx \,.\, \sim (z) \sim x \,\varepsilon\, z))'$.

Es por medio del abstractivo que presentamos notaciones para indicar clases específicas, como en las siguientes definiciones:

D5. $'V'$ *por* $'\hat{x}(x = x)'$.

D6. $'0'$ *por* $'\hat{x} \sim x = x'$.

D7. $'\iota x'$ *por* $'\hat{y}\,(y = x)'$.

Debe entenderse que los pronombres libres en las expresiones definidas —por ejemplo 'x' en D7— pueden ser sustituídos no sólo por otros pronombres, sino también por descriptivos y en particular por abstractivos, sin que deje de regir la convención de abreviatura.

V, definida como la clase de todos los elementos x tales que $x = x$, es simplemente la clase de todos los elementos. (Hay poco peligro de confusión entre este 'V' y el 'V' que se usa en las tablas de valores.) '0' definido como la clase de los elementos x tales que '$\sim x = x$', es la clase vacía mencionada anteriormente. 'ιx', definida como la clase de todos los elementos y tales que $y = x$, es obviamente 0 si x no es elemento; pero si x es elemento, x es la *clase unitaria* de x, es decir, la clase cuyo único miembro es x. En el caso en que x es un individuo, $\iota x = x$ (cf. § 43); pero en el otro caso $\iota x \neq x$. Por ejemplo, $\iota V \neq V$, pues ιV no tiene más que un miembro, mientras que V debe tener varios; y $\iota 0 \neq 0$, pues $\iota 0$ tiene un miembro (si 0 es elemento), en tanto que 0 no tiene ninguno.

La demostración de teoremas sobre la base de *1 y *2 ya fué

iniciada con (K)-(N) en el § 33, incorporándoselos a la teoría de las clases, como señalamos al final del § 43. Lo mismo ocurre, por D3, con los principios (O)-(Q) de la teoría de la descripción. Quedan por demostrar varios principios relacionados con la abstracción, de los cuales los más importantes afirman que todas las matrices de las formas

(5) $y \varepsilon \hat{x} f x \equiv (fy \,.\, \sim (z) \sim y \varepsilon z)$,

(6) $\sim ((y)\, gy \,.\, \sim g\hat{x} f x)$

son válidas. La demostración de estos principios, sobre la base de *1, *2, D1-4 y los resultados intermedios (K)-(Q), por medio de las técnicas de la teoría de la cuantificación, puede ser un ejercicio interesante para el lector. En seguida se deducen fácilmente varios teoremas sobre las nociones definidas en D5-7, entre ellos los siguientes:

(7) $(x) \quad \sim x \varepsilon 0,$

(8) $(x) \quad x \varepsilon V \equiv \sim (y) \sim x \varepsilon y,$

(9) $(x) \quad x \varepsilon V \equiv \sim \iota x = 0$,

(10) $(x) \quad x \varepsilon V \equiv x \varepsilon \iota x$.

Obsérvese, en particular, que (8) nos suministra una manera más breve de decir que x es elemento; a saber, '$x \varepsilon V$'.

§ 47. *Algebra de las clases*

Las definiciones siguientes determinan el *complemento* $\bar{x}$ de una clase x y el *producto lógico* $x \cap y$ de las clases x e y:

D8 '$\bar{x}$' *por* '$\hat{y} \sim y \varepsilon x$'

D9 '$x \cap y$' *por* '$\hat{z}\,(z \varepsilon x \,.\, z \varepsilon y)$'.

$\bar{x}$ es la clase de todos los elementos excepto los miembros de x, y $x \cap y$ es la clase de todos los elementos que son miembros comunes de x e y. Ya que todos los miembros de x e y son elementos,

podemos describir $x \cap y$ simplemente como la parte común a x y a y. Si x es la clase de los abogados e y la clase de los brasileños, $x \cap y$ es la clase de los abogados brasileños.

Por medio de los signos de complemento y de producto podemos designar varias otras clases: $x \cap \bar{y}$ es la clase de los miembros de x que no pertenecen a y; $\bar{x} \cap \bar{y}$ es la clase de los elementos que no pertenecen a x ni a y; $\overline{x \cap y}$ es la clase de los elementos que no son comunes a x e y; $\bar{\bar{x}} \cap y$ es la clase de los miembros de x y de todos los elementos que no pertenecen a y; y $\overline{\bar{\bar{x}} \cap \bar{\bar{y}}}$ es la clase que abarca a todos los miembros de x y todos los miembros de y. Si x es la clase de los abogados e y la de los brasileños, $\overline{\bar{\bar{x}} \cap \bar{\bar{y}}}$ tiene como miembros todos los abogados, tanto brasileños como extranjeros, y también todos los otros brasileños.

El complemento y el producto forman el tema de una pequeña álgebra de las clases [26] entre cuyas leyes (demostradas sobre la base de *1, *2 y D1-9, pero que no demostramos aquí) se hallan las siguientes:

(11) $(x) \quad x = \bar{\bar{x}}$

(12) $(x) \quad x = x \cap x$

(13) $(x)\,(y) \quad x \cap y = y \cap x$

(14) $(x)\,(y)\,(z) \quad (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$

(15) $(x)\,(y) \quad x \cap y = \overline{\bar{x} \cap \bar{y}}$.

Se puede comprobar que entre esta álgebra y la teoría de la composición existe un paralelismo en el siguiente sentido: cada identidad de esta álgebra corresponde a una equivalencia composicional y viceversa; y los términos de las identidades contienen los signos de complemento y producto allí donde los enunciados de las equivalencias contienen '$\sim$' y '.' respectivamente. Las identidades de

[26] Fundada por Boole (1847) y desarrollada por Peirce y Schröder. Se encuentran anticipaciones del álgebra ya en escritos de Leibniz (a partir de 1690).

esta álgebra son, por esto, susceptibles de ser verificadas mediante un criterio mecánico idéntico al que se usa para legitimar la equivalencia composicional.

Las clases V y 0 caben en la misma álgebra, en virtud de las leyes

(16) $(x) \quad x \cap \bar{x} = 0,$

(17) $\bar{0} = V.$

Otras leyes algebraicas relativas a V y 0 son:

(18) $(x) \quad x \cap 0 = 0,$

(19) $(x) \quad x \cap V = x.$

La clase $\overline{\bar{x} \cap \bar{y}}$, que hemos descripto anteriormente, suele denominarse la *suma lógica* de x e y, y posee una notación especial:

D10. '$x \cup y$' *por* '$\overline{\bar{x} \cap \bar{y}}$'.

El hecho de introducir una abreviación suscita, en general, la necesidad de registrar algunas leyes más, las que, escritas sin hacer uso de la abreviación, serían meros casos particulares o corolarios menores de otras leyes ya enunciadas. De esta manera, la multiplicación de convenciones de abreviación engendra, por encima del contenido líquido de la matemática, un vasto volumen de espuma casi sin sustancia. Pero el papel de la suma lógica es tal vez lo suficientemente central como para justificar la adopción de D10. Algunas de las leyes que aparecen en seguida son las siguientes:

(20) $(x) \quad x = x \cup x,$

(21) $(x)\ (y) \quad x \cup y = y \cup x,$

(22) $(x)\ (y)\ (z) \quad (x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z),$

(23) $(x)\ (y)\ (z) \quad x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z),$

(24) $(x)\ (y)\ (z) \quad x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z),$

(25) $(x) \quad x \cup \bar{x} = V,$

(26) $(x) \quad x \cup V = V,$

(27) $(x) \quad x \cup 0 = x.$

La notación de la suma lógica se combina con la de clase uni-

taria dando una notación que permite especificar una clase finita por enumeración de sus miembros; pues, siendo x, y, z,... elementos cualesquiera, la clase cuyos elementos son x, y, z,... es $\iota x \cup \iota y \cup \iota z$ ... Esta formulación no pertenece, sin embargo, al álgebra de las clases propiamente dicha, que es sólo un fragmento de la teoría de las clases. La noción de clase unitaria ιx es ajena al álgebra, así como también lo es la noción general de abstracción y la noción fundamental de pertenencia.

Que una clase x esté *incluída* en una clase y, en el sentido de que todos los miembros de x son miembros de y, lo expresaremos en la forma '$x \leqq y$'. Podríamos definir '$x \leqq y$' como la abreviatura de '$(z) \sim (z \in x \,.\, \sim z \in y)$'; pero la siguiente definición equivalente acentúa el hecho de que la noción de inclusión forma parte del álgebra de las clases:

D11. '$x \leqq y$' *por* '$x = x \cap y$'.

Otra noción relacionada es la que sugiere una analogía con la aritmética:

D12. '$x < y$' *por* '$x \leqq y \,.\, \sim x = y$'.

Estas nociones de inclusión son, en rigor, generalizaciones y no meras analogías con los conceptos correspondientes de la aritmética. Cuando x e y son números, de las definiciones de números (§ § 52-53) resultará que $x \leqq y$ en el sentido numérico si, y solamente si $x \leqq y$ en el sentido de inclusión definido por D11; lo mismo sucede con D12. D11-D12 son definiciones de dos nociones aritméticas familiares, en un sentido generalizado que admite usos no menos importantes fuera del campo de los números. Además de esto, la clase vacía 0, definida en D6, se presentará en la aritmética desempeñando el papel del número 0.

Entre los teoremas fácilmente demostrables destacamos los siguientes; obsérvese que el primero es al mismo tiempo una generalización de un principio aritmético y una formulación del principio silogístico 'Si todo miembro de x es miembro de y y todo miembro de y es miembro de z, entonces todo miembro de x es miembro de z'.

(28) $(x)\ (y)\ (z) \quad \sim (x \leqq y\ .\ y \leqq z\ .\ \sim x \leqq z),$

(29) $(x)\ (y) \quad \sim (x \leqq y\ .\ y \leqq x\ .\ \sim x = y,)$

(30) $(x) \quad x \leqq x$

(31) $(x) \quad 0 \leqq x$

(32) $(x) \quad x \leqq V,$

(33) $(x)\ (y)\ (z) \quad (x \leqq y \cap z) \equiv (x \leqq y\ .\ x \leqq z),$

(34) $(x)\ (y)\ (z) \quad (x \cup y \leqq z) \equiv (x \leqq z\ .\ y \leqq z).$

El principio aritmético, de que $y \leqq x$ (y de hecho $y < x$) siempre que no sea $x \leqq y$, rige en el dominio de los números pero falla en el caso más general. Si x es la clase de los abogados e y la de los brasileños, por ejemplo, no es que $x \leqq y$ (pues algunos abogados son extranjeros) y tampoco vale $y \leqq x$.

§ 48. *Relaciones*

La noción de *relación* es tan necesaria para la matemática como la de clase o atributo. Las *funciones*, mencionadas tan a menudo en la matemática, son simplemente relaciones. La función "mitad de", por ejemplo, es la relación de cada número con su duplo. La función expresada por '$3x^2 + 2x + 5$' es la relación que rige entre los números $3x^2 + 2x + 5$ y x, para todo número x. También las *series*, tan prominentes en la matemática, son relaciones; pues la noción más clara de serie la identifica con la relación existente entre cada elemento x de la serie y cada elemento de la serie no anterior a x. La serie de los números, por ejemplo, se identifica con la relación de todo número x con todo número y tal que $x \leqq y$.

Así como fue natural suponer que toda matriz con un pronombre libre determina una clase, también ahora es natural suponer que toda matriz con *dos* pronombres libres, 'x' e 'y', determina una relación: la relación de cualquier objeto x con cualquier objeto y tal que x e y satisfacen la matriz. Vale decir, es natural suponer que todas las matrices de la forma

(35) $\sim (z) \sim (x)\ (y)\ (z$ relaciona x con $y \equiv fxy)$

sean válidas, así como fue natural suponer que todas las matrices de la forma (1) del § 45 fueran válidas. Vimos, sin embargo, que esta suposición no era sostenible en el caso de las clases. Lo mismo ocurre en el caso de las relaciones; pues uno de los enunciados de la forma (35) es

(36) $\sim (z) \sim (x) (y)$ (z relaciona x con $y \equiv \sim x$ relaciona x con y),

a pesar de que la negación de (36) es demostrable en la teoría de la cuantificación de la misma manera que la negación (3) de (2), en el § 45 [27].

El remedio, tanto en el caso de las relaciones como en el de las clases, consiste en restringirlas a elementos. Así como habíamos limitado (1) de la manera *2, ahora limitaremos (31) de la manera siguiente:

(37) $\sim (z) \sim (x) (y)$ (z relaciona x con $y \equiv (fxy \,.\, x \varepsilon V \,.\, y \varepsilon V)$).

Para todos los fines de las relaciones bastan las clases de *pares ordenados* de elementos. Escribiendo '$x;y$' para designar el par ordenado que consta de x e y en el orden indicado, podemos, por ejemplo, considerar la función "mitad de" como la clase de los pares ordenados $\frac{1}{4};\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3};\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2};1$, $3;6$, etc.; en resumen, la clase de los pares ordenados $\frac{x}{2};x$ para todos los números x. La función expresada por '$3x^2 + 2x + 5$' será la clase de los pares ordenados $(3x^2 + 2x + 5);x$ para todos los números x. La relación filial es la clase de los pares ordenados $x;y$, para todos los animales x e y, tales que x es hijo de y.

Es esencial concebir los pares como ordenados, de manera que los pares $x;y$ e $y;x$ sean distintos para todos los elementos distintos x e y; pues queremos que el par $3;6$ pertenezca a la relación "mitad de" y que Isaac;Abraham pertenezca a la relación "hijo de", pero no queremos que los pares opuestos $6;3$ y Abraham;Isaac

[27] El ejemplo (36), como el (2) del § 45, se debe a Russell (1903, Apéndice A)

pertenezcan a esas relaciones, ya que 6 no es la mitad de 3 ni Abraham es hijo de Isaac. Más generalmente, es esencial que los elementos x e y cualesquiera estén unívocamente determinados y distinguidos por $x;y$. El principio fundamental de los pares ordenados debe ser, por ello, el siguiente:

(38) $(x)\ (y)\ (z)\ (w) \quad \sim (x \varepsilon V\ .\ y \varepsilon V\ .\ z \varepsilon V\ .\ w \varepsilon V\ .\ x;y = z;w\ .\ \sim (x = z\ .\ y = w))$.

Cualquier definición de par ordenado que satisfaga a (38) será adecuada. Ocurre que es posible construir tal definición, tan sólo sobre la base de la teoría de las clases; es ésta [28]:

D13. '$x;y$' *por* '$\iota\iota x \cup \iota(\iota x \cup \iota y)$'.

El par ordenado de elementos cualesquiera x e y es, pues, la clase cuyos miembros son la clase unitaria de x y la clase cuyos miembros son x e y. Esta formulación, a pesar de ser artificial, satisface a (38). Sobre la base de D13 y de la teoría de las clases fundada anteriormente (38) se puede demostrar como teorema.

Decir que w relaciona a x e y es decir que x e y son elementos tales que $x;y \varepsilon w$. Por lo tanto, escribiendo '$w\ (x,y)$' en el sentido 'w relaciona x con y', adoptamos la definición siguiente:

D14. '$w\ (x,y)$' *por* '$x;y \varepsilon w\ .\ x \varepsilon V\ .\ y \varepsilon V$'.

Es útil adoptar un prefijo '$\hat{x}\hat{y}$' de la abstracción de relaciones, paralelo al prefijo '$\hat{x}$' de la abstracción de clases. El prefijo '$\hat{x}\hat{y}$', que se lee 'la relación de cualquier elemento x con cualquier elemento y tal que', admite una definición análoga a D4:

D15. '$\hat{x}\hat{y}fxy$' por '$(\iota z)\ (x)\ (y)\ (z\ (x,y) \equiv (fxy\ .\ x \varepsilon V\ .\ y \varepsilon V))$'.

Las relaciones que hemos considerado hasta aquí son *diádicas*, en el sentido de que relacionan elementos por parejas. En cambio, la relación de *dar* (x da y a z) es *triádica*, y la relación de *pagar* (x paga y a z por w) es *tetrádica*, ya que se constituyen, respectiva-

[28] Debida a Wiener (1914) y simplificada por Kuratowski (1921).

mente, clases de ternas y cuaternas ordenadas, en lugar de pares. Podemos construir ternas, cuaternas, etc., sobre la base de la noción de par, en la forma $x;(y;z)$, $x;(y;(z;w))$, etc., construyendo después definiciones, exactamente análogas a D14-15, para las relaciones triádicas, tetrádicas, etc. Las definiciones para el caso triádico son

D16. $\quad$ '$w(x, y, z)$' *por* '$x;(y;z) \varepsilon w \,.\, x \varepsilon V \,.\, y \varepsilon V \,.\, z \varepsilon V$'.

D17. $\quad$ '$\hat{x}\hat{y}\hat{z}fxyz$' por '$(\iota w)\,(x)\,(y)\,(z)\,(w(x, y, z) \equiv (fxyz \,.\, x \varepsilon V \,.$

$.\, y \varepsilon V \,.\, z \varepsilon V))$'.

Las leyes fundamentales sobre la abstracción relacional son exactamente análogas a las dos leyes fundamentales (5) y (6) del § 46 sobre la abstracción de clases. Para el caso diádico tenemos

(39) $\quad \hat{x}\hat{y}fxy(z,w) \equiv (fzw \,.\, z \varepsilon V \,.\, w \varepsilon V)$,

(40) $\quad \sim ((y)gy \,.\, \sim \hat{x}\hat{y}fxy)$.

Para el caso triádico, son

(41) $\quad \hat{x}\hat{y}\hat{z}fxyz\,(u, v, w) \equiv (fuvw \,.\, u \varepsilon V \,.\, y \varepsilon V \,.\, w \varepsilon V)$,

(42) $\quad \sim ((y)gy \,.\, \sim \hat{x}\hat{y}\hat{z}fxyz)$.

Para las relaciones de orden superior valen leyes similares.

Estas leyes no son, sin embargo, demostrables sobre la sola base de *1 y *2. Para demostrarlas es preciso agregar otro principio, según el cual los pares ordenados de elementos son elementos; pues son los pares, y no los elementos dentro de los pares, los que deben ser miembros de las relaciones. Para fundar la teoría de las relaciones debemos agregar a *1 y *2 el axioma

*3. $\quad (x)\,(y) \quad \sim (x \varepsilon V \,.\, y \varepsilon V \,.\, \sim x;y \varepsilon V)$.

Este principio referente a pares basta también para las ternas, pues nos da los dos casos siguientes:

$$\sim (y \varepsilon V \,.\, z \varepsilon V \,.\, \sim y;z \varepsilon V),$$
$$\sim (x \varepsilon V \,.\, y;z \varepsilon V \,.\, \sim x;(y;z) \varepsilon V),$$

cuya conjunción implica composicionalmente

$$\sim (x \varepsilon V \,.\, y \varepsilon V \,.\, z \varepsilon V \,.\, \sim x;(y;z) \varepsilon V).$$

La extensión a cuaternas, quintas, etc., se deduce de la misma siguiente manera. Es posible demostrar (39)-(42), y los principios análogos para los casos de orden superior, sobre la base de *1-*3.

La observación del § 45, de que *1 y *2 se satisfacen inclusive en un universo cuyo objeto único es 0, vale también para *1-*3. Esta observación es útil como advertencia metodológica, conforme a la cual siempre es una pérdida de tiempo buscar una demostración sobre la base de *1-*3 cuando el teorema buscado implica que alguna clase tiene miembros. Naturalmente, esta ontología casi vacía no suministra una interpretación seria de la teoría de las clases y las relaciones. Con arreglo a esta ontología, dicha teoría sería reducible al principio único '$(x)\ (y) \sim x \varepsilon y$'.

§ 49. *Relación recíproca, imagen y producto relativo*

He aquí tres nociones de la teoría de las relaciones que son de utilidad dentro y fuera de la matemática:

D18. 'X^{-1}' *por* '$\hat{y}\hat{z}x(z, y)$',

D19. '$x``y$' *por* '$\hat{z} \sim (w) \sim (w \varepsilon y \,.\, x(z, w))$',

D20. '$x \mid y$' *por* '$\hat{z}\hat{w} \sim (v) \sim (x(z, v) \,.\, y(v, w))$'.

X^{-1}, llamada la *recíproca* (o *inversa*) de x, es la relación que consiste en los pares inversos a los pares que pertenecen a x. La recíproca de la relación 'mitad de' es la relación 'duplo de', y la recíproca de la relación de padres a hijos es la relación de hijos a padres.

$x``y$, llamada *imagen* de $y$ por $x$, es la clase de los objetos que están relacionados por $x$ con miembros de $y$. Si $x$ es la relación 'cuadrado de' e $y$ es la clase de los números primos, entonces $x``y$ es la clase de los cuadrados de números primos. Si x es la relación de hijo a padre, e y es la clase de los abogados, entonces $x``y$ es la clase de los hijos de abogados; y $x^{-1}``y$ es la clase de los padres de abogados.

$x \mid y$, llamado *producto relativo* de x e y, es la relación de cualquier objeto z con cualquier objeto w tal que z está relacionado por x con algún objeto relacionado a w por y. Si x es la relación de hermano e y la relación de madre, $x \mid y$ es la relación de tío materno. Si x es la relación de padre e y la relación de madre, $x \mid y$ es la relación de abuelo materno; $y \mid x$ es la relación de abuela paterna; $x \mid y^{-1}$ es la relación de un hombre con la madre de alguno de sus hijos; $y \mid x^{-1}$ es la relación de una mujer con el padre de alguno de sus hijos; $x^{-1} \mid y$ es 0, porque es la relación que z tendría con w sólo si el padre de z fuera la madre de w; y $y^{-1} \mid x$ también es 0.

La importancia de estas nociones es notoria. En particular, es interesante advertir la variedad de sentidos expresables por la combinación de la noción de imagen con la de complemento. Supongamos que x sea la relación de cada hombre con cada momento en que vive, y que y sea la clase de los momentos del año 1930. Es fácil verificar que

$x``y$ = clase de los hombres vivos durante, por lo menos, una parte de 1930.

$x``\bar{y}$ = clase de los hombres cuyas vidas no se limitan al año 1930.

$\bar{x}``y$ = clase de los hombres cuyas vidas no exceden 1930 (y de todos los elementos que no son hombres).

$\bar{x}``\bar{y}$ = V (no en general, pero sí en este ejemplo).

$\overline{x``y}$ = clase de los hombres cuyas vidas no tocan 1930 (y de todos los elementos que no son hombres).

$\overline{x``\bar{y}}$ = clase de los niños vivos sólo dentro de 1930 (y de todos los elementos que no son hombres).

$\overline{\overline{x``y}}$ = clase de los hombres que nacen a comienzos de 1930 o antes, y mueren a fines de 1930 o después.

$\overline{\overline{x``y}} = 0.$

Conservando la misma relación x e interpretando z como la clase de los *bandeirantes* *, observamos además que

$x^{-1}``z$ = tiempo (clase de los momentos) en que vivían uno o más *bandeirantes*,

$x^{-1}``z$ = tiempo en que vivían hombres no-*bandeirantes* (esto es, todo el tiempo de la especie humana).

Dejo al lector los casos restantes.

Está claro que $(x^{-1})^{-1} = x$ para toda relación x; pero no para todo objeto x, pues $(x^{-1})^{-1}$ será relación (clase de pares ordenados) aun cuando x contenga algunos miembros que no sean pares. La condición '$x = (x^{-1})^{-1}$' sirve, en efecto, para afirmar que x es relación.

Entre los diversos teoremas que rigen la relación recíproca, la imagen y el producto relativo, mencionaremos los siguientes:

(1)	(x)	$x``V = \hat{y} \sim (z) \sim x(y, z)$
(2)	(x)	$x^{-1}``V = \hat{z} \sim (y) \sim x(y, z)$
(3)	$(x)\ (z)$	$x``\iota z = \hat{y}\, x(y, z)$
(4)	$(x)\ (y)$	$x^{-1}``\iota y = \hat{z}\, x(y, z)$
(5)	$(x)\ (y)\ (z)$	$(x \cup y)``z = (x``z) \cup (y``z)$
(6)	$(x)\ (y)\ (z)$	$x``(y \cup z) = (x``y) \cup (x``z)$
(7)	$(x)\ (y)\ (z)$	$(x \mid y) \mid z = x \mid (y \mid z)$
(8)	$(x)\ (y)$	$(x^{-1} \mid y^{-1})^{-1} = y \mid x$
(9)	$(x)\ (y)\ (z)$	$x``(y``z) = (x \mid y)``z.$

* *Bandeirantes*, bandidos paulistas que se especializaban en la caza de esclavos. (N. del T.)

Las clases x ``$V$, y $x^{-1}$ ``V descriptas por (1) y (2), se llaman *dominio* y *codominio* de x respectivamente. El dominio de la relación 'tío de', por ejemplo, es la clase de todos los tíos, y su codominio es la clase de todas las personas que tienen tíos, o sea, la clase de todos los sobrinos (y sobrinas).

Siendo x la relación 'tío de', x ``$\iota z$ será, según (3), la clase de todos los tíos de $z$, y $x^{-1}$ ``ι y será, según (4), la clase de todos los sobrinos (y sobrinas) de y.

La ley (5) indica, por ejemplo, que la clase de todas las personas que son padres o amigos de abogados consta de los padres de abogados y de los amigos de abogados; y (6) indica que las esposas de los clasicistas comprenden tanto las esposas de los helenistas como las esposas de los latinistas. Obsérvese que las leyes correspondientes fallan para el producto lógico. Si x es la relación 'más viejo que', y la relación 'hermano de', y z la clase de los marineros, entonces

$$(x \cap y) \text{ ``} z \neq (x \text{ ``} z) \cap (y \text{ ``} z),$$

pues $(x \cap y)$``$z$ es la clase de los hermanos más viejos de los marineros, mientras que $(x$``$z) \cap (y$``$z)$ también comprende a toda persona que sea más vieja que algún marinero y hermana menor de otro marinero. Si x es la relación de ayudar, y la clase de los músicos, y z la clase de los lisiados, entonces

$$x \text{ ``} (y \cap z) \neq (x \text{ ``} y) \cap (x \text{ ``} z),$$

pues x``$(y \cap z)$ es la clase que sólo comprende a los benefactores de los músicos lisiados, mientras que $(x$``$y) \cap (x$``$z)$ comprende también a toda persona que haya ayudado a algún músico y a algún lisiado no músico.

La ley (7) revela que el agrupamiento en un producto relativo iterativo es indiferente. Si x es la relación de hermano, y la de padre y z la de madre, lo que dice (7) es que los tíos paternos de la madre de alguien en cuestión son los hermanos de su abuelo materno. Adviértase, en cambio, que el orden en un producto relativo

no es indiferente; por ejemplo, el abuelo materno no es la abuela paterna.

Como las recíprocas de las relaciones de patrón a empleado y de padre a hijo son las relaciones de empleado a patrón y de hijo a padre respectivamente, (8) nos dice que la recíproca de la relación 'patrón del padre de' es la relación 'hijo de un empleado de'. Finalmente, (9) indica que los hermanos de los padres de los abogados son los tíos de los abogados [29].

§ 50. *Especies de relaciones*

Si no tenemos en cuenta la cualidad de los miembros de una clase, el único carácter que queda como base de contraste entre las clases es la potencia, o sea, el número de miembros. En el caso de las relaciones diádicas, en cambio, nos queda todavía una base de contrastes y clasificaciones importantes después de hacer abstracción de la índole y del número de los elementos relacionados.

Una relación x se llama *simétrica* si, toda vez que $x(y, z)$, se sigue que $x(z, y)$; y *asimétrica* si, toda vez que $x(y, z)$, se sigue que $\sim x(z, y)$. La relación de colega es simétrica y la de padre asimétrica. La relación de hermana no es simétrica ni asimétrica, pues hay personas y y z tales que y es hermana de z y viceversa, pero también hay otras tales que y es hermana de z pero no a la inversa.

Una relación x se llama *transitiva* si, toda vez que $x(y, z)$ y $x(z, w)$, se sigue que $x(y, w)$; e *intransitiva* si, toda vez que $x(y, z)$ y $x(z, w)$, se sigue que $\sim x(y, w)$. La relación de inclusión, por ejemplo —o sea, $\overset{\wedge\wedge}{uv}(u \leqq v)$— es transitiva, y la relación de padre es intransitiva. La relación de hermano no es enteramente transitiva ni intransitiva, pues siendo y hermano de z y z hermano de w, y puede ser hermano de w o el mismo w.

[29] El cálculo de relaciones, que se ocupa de las nociones del § 49 y de algunas de las del 50, fue fundada por De Morgan y Peirce (1860-70).

La relación de identidad, I, definida en la forma

D21. 'I' por '$\hat{x}\hat{y}(x = y)$',

es un ejemplo de relación a la vez simétrica y transitiva. Adviértase que 'I' es el nombre de la relación, mientras que '$=$' no es nombre. Más aún, '$I(x, y)$' y '$x = y$' no son equivalentes; en efecto, '$I(x, y)$' implica que x e y son elementos, no así '$x = y$'. Las mismas diferencias rigen para '$\hat{u}\hat{v}(u \leqq v)$' y '$\leqq$'.

Una relación x se llama *antisimétrica* si, toda vez que $x(y, z)$ y $x(z, y)$, se sigue que $y = z$. Las relaciones $\hat{u}\hat{v}(u \leqq v)$ e I, por ejemplo, son ambas antisimétricas.

Además de la formulación simbólica '$(y)\ (z) \sim (x(y, z)\ .\ \sim x(z, y))$', que corresponde directamente a la definición verbal de 'x es simétrica', existe una formulación más breve que es equivalente; lo mismo sucede con la asimetría, la antisimetría, la transitividad y la intransitividad:

x es *simétrica*:	$x^{-1} \leqq x$,
x es *asimétrica*:	$x^{-1} \cap x = 0$,
x es *antisimétrica*:	$x^{-1} \cap x \leqq I$,
x es *transitiva*:	$x \mid x \leqq x$,
x es *intransitiva*:	$x \cap (x \mid x) = 0$.

Una relación x se llama *reflexiva* si, toda vez que y pertenece al dominio o codominio de x, se sigue que $x(y, y)$. La relación I, por ejemplo, es reflexiva; lo mismo ocurre con la relación de inclusión $\hat{u}\hat{v}(u \leqq v)$. Pero una relación reflexiva no debe necesariamente relacionar a todo elemento consigo mismo, como sucede con I y con $\hat{u}\hat{v}(u \leqq v)$. La relación entre personas contemporáneas es reflexiva aun cuando sólo se refiera a personas.

Como preparación para las formulaciones concisas de reflexividad y otras nociones, adoptemos la siguiente definición:

D22. $'x_y'$ *por* $'\hat{z}\hat{w}(x(z, w) \,.\, z \in (y``V) \cup (y^{-1}``V) \,.\, w \in (y``V) \cup (y^{-1}``V))'$.

Si x e y son relaciones, x_y es la relación x limitada a los mismos miembros del dominio y del codominio de y. En particular, I_y es la relación de todo miembro del dominio o codominio de y consigo mismo. Con esto, la reflexividad puede formularse así:

$$x \text{ es } \textit{reflexiva}: \qquad I_x \leqq x.$$

Una relación se llama *completamente conexa* cuando rige, en una u otra dirección, entre todos los objetos del dominio y del codominio. Esta otra definición es equivalente:

$$x \text{ es } \textit{completamente conexa}^{30}: \qquad V_x \leqq x \cup x.^{-1}$$

La relación entre números y y z, tales que $y \leqq z$, es conexa, pues cualesquier objetos y y z del dominio o codominio de esta relación —en una palabra, números cualesquiera— son tales que $y \leqq z$ o $z \leqq y$.

Una *serie* se identifica, como ya lo hemos mencionado (§ 48), con la relación entre cada elemento y de la serie y cada elemento de la serie no anterior a y. Para definir la idea de serie debemos, pues, determinar qué propiedades debe poseer una relación para ser la relación entre cada elemento y de una serie (en el sentido vago e intuitivo de la palabra) y un elemento no anterior. Estas propiedades son tres: *transitividad*, *antisimetría* y *conexión completa*[31]. La relación entre números y y z, tales que $y \leqq z$, es un ejemplo de esta

[30] Uso el adverbio para distinguir entre este tipo de conexión y la conexión en el sentido de Russell(1901), o sea, $V_x \leqq x \cup x^{-1} \cup I$. Llamando a ésta última *cuasiconexión* podríamos prescindir de nuestro adverbio.

[31] Russell identificó la serie con la relación de cada elemento con cada elemento posterior; así, identificó la serie de los números con la relación entre los números y y z tales que $y < z$. Las propiedades que Russell enumera en la definición de serie difieren, por consiguiente, de las tres mencionadas. Pero el método actual es más conveniente y cada vez más usual.

combinación de tres propiedades. Esta es la relación con que se identifica la serie de los números.

Una generalización de la noción de serie, cada vez más importante en la literatura matemática, es la noción de *orden parcial*, o sea, la de una relación transitiva, antisimétrica y reflexiva. Toda serie es un orden parcial, pues la conexión completa implica la reflexividad; pero no todo orden parcial es una serie. La relación general de inclusión, $\hat{u}\hat{v}(u \leqq v)$, es orden parcial pero no serie. No es conexa, como ya se observó en relación con el ejemplo de los brasileños y abogados (final del § 47). La noción de orden parcial es importante por ser, quizá, el tipo más general que merece el nombre de orden.

La noción de serie se divide, a su vez, en un sinnúmero de especies. Hay series *discretas*, series *densas*, series *continuas*, series *bien ordenadas*. El estudio de las series de esta última especie se ha convertido en un capítulo muy importante de la matemática: la teoría de los números infinitos ordinales [32]. Dejemos sin embargo este fecundo campo para estudiar otras dos clases de relaciones.

Una relación se llama *unívoca* (en matemática, función unívoca de una variable) si, toda vez que $x(y, w)$ y $x(z, w)$, se sigue que $y = z$; en resumen, x nunca relaciona dos objetos al mismo objeto. La formulación concisa es la siguiente:

$$x \text{ es } \textit{unívoca}: \qquad x \mid x^{-1} \leqq I.$$

La relación 'madre de', por ejemplo, es unívoca; pero la relación 'hijo de' no lo es. La relación 'duplo de' es unívoca, y así también las demás 'funciones polinomias de una variable' de la matemática, tales como la función correspondiente a la expresión '$x^2 + 4x + 4$', esto es, la relación $\hat{y}\hat{x}(y = x^2 + 4x + 4)$. Una relación es unívoca si, dado w, el hecho de que y mantenga esta relación con w basta para determinar y.

[32] Algunas buenas obras introductorias a este dominio, cuyo principal pionero fue Cantor, son las de Huntington, *The Continuum*, y Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*. Véase también mi *Element and Number*.

Una relación x se llama *transformación*, en matemática, si ella y su recíproca son unívocas y tienen el mismo dominio.

x es *transformación*: $\quad x \mid x^{-1} \leqq I \,.\, x^{-1} \mid x \leqq I \,.\, x``V = x^{-1}``V.$

La relación 'cuadrado de', es decir, $\overset{\wedge\wedge}{yx}(y = x^2)$, considerada como relación no sólo entre números positivos, no es una transformación; así, su recíproca $\overset{\wedge\wedge}{xy}(y = x^2)$ no es unívoca, ya que relaciona 2 y — 2 con el mismo número 4. La relación de marido a esposa, cuando se limita a personas que no se casan dos veces, es unívoca y tiene recíproca unívoca, pero no es una transformación; pues su dominio consta de varones, mientras que su codominio (dominio de la recíproca) consta de mujeres. Pero la relación 'duplo de', o sea, $\overset{\wedge\wedge}{yx}(y = 2x)$, considerada como relación no sólo entre números enteros, es una transformación; es unívoca y también lo es su recíproca $\overset{\wedge\wedge}{xy}(y = 2x)$ (la relación de la mitad), y los dominios de ambas agotan todos los números.

Una rama ya clásica de la matemática, llamada *teoría de los grupos*, estudia las nociones de recíproca, producto relativo e identidad limitada (I_y) en sus aplicaciones a las transformaciones. Un grupo consiste en un conjunto cualquiera de transformaciones de dominios iguales, juntamente con todas las transformaciones obtenibles a partir de las transformaciones dadas por medio de la formación de productos relativos y recíprocas. Una de las transformaciones de un grupo es siempre I_y, donde y es cualquier transformación del grupo; en efecto, cuando y es transformación, $I_y = y \mid y^{-1} = y^{-1} \mid y$. La teoría de los grupos es una parte de la teoría de las relaciones, y ha sido aplicada muchas veces con provecho, por ejemplo, en la mecánica cuántica y en la cristalografía.

§ 51. *Teoría virtual de clases y relaciones*

La teoría de las clases, juntamente con su parte, la teoría de las relaciones, fue desarrollada en las páginas anteriores sobre la base de aceptar una ontología que admite objetos abstractos, las clases, como reales. El signo fundamental 'ε', de pertenencia, se utilizó entre pronombres de cuantificación, exigiéndose que las clases en relación con las cuales rige tal pertenencia, fuesen objetos incluídos en el universo abarcado por los cuantificadores. No debe sorprender que la teoría de las clases exija, así, el reconocimiento de las clases. Pero ocurre que una parte importante de la teoría de las clases (y de las relaciones) admite una forma diferente de desarrollo, de manera tal que pasa a formar parte de la propia teoría de la cuantificación o de la identidad, con lo que se evita por completo toda suposición ontológica.

El método consiste en introducir las siguientes convenciones de abreviatura, análogas a D2, D8-12 y D18-20, para la aplicación directa a las letras esquemáticas 'f', 'g', etc., que se usan en la teoría de la cuantificación:

D2'. '$f = g$' *por* '$(x)\ (fx \equiv gx)$' (o '$(x)\ (y)\ fxy \equiv gxy)$', etc., conforme al contexto).

D8'. '$\bar{f}x$' *por* '$\sim fx$', '$\bar{f}xy$' *por* '$\sim fxy$', etc.

D9'. '$(f \cap g)x$' *por* '$fx\ .\ gx$', '$(f \cap g)\ xy$' *por* '$fxy\ .\ gxy$', etc.

D10'. '$f \cup g$' *por* '$\overline{\bar{f} \cap \bar{g}}$'

D11'. '$f \leqq g$' *por* '$f = f \cap g$'.

D12'. '$f < g$' *por* '$f \leqq g\ .\ \sim f = g$'.

D18'. '$f^{-1}xy$' *por* 'fyx'.

D19'. '$(f``g)x$' *por* '$\sim (y) \sim (gy\ .\ fxy)$'.

D20'. '$(f \mid g)xy$' *por* '$\sim (z) \sim (fxz\ .\ gzy)$'.

Por ejemplo, en correspondencia con el enunciado (5) del § 49, tenemos, en esta nueva notación, el esquema

(1) $(f \cup g)``h = (f``h) \cup (g``h)$,

que es la abreviatura del esquema cuantificacionalmente válido

(2) $(x) \quad \sim (y) \sim (hy \,.\, \sim (\sim fxy \,.\, \sim gxy)) \equiv \sim ((y) \sim (hy \,.\, fxy) \,.\, (y) \sim (hy \,.\, gxy))$.

Todas las matrices de la forma representada por el esquema (2) son cuantificacionalmente válidas, como se demuestra fácilmente dentro de la teoría de la cuantificación.

(a) $\sim (y) \sim (hy \,.\, \sim (\sim fxy \,.\, \sim gxy)) \equiv \sim (y) \sim (hy \,.\, \sim (\sim fxy \,.\, \sim gxy))$ Por (i)

(b) $\sim (y) \sim (hy \,.\, \sim (\sim fxy \,.\, \sim gxy)) \equiv \sim (y) (\sim (hy \,.\, fxy) \,.\, \sim (hy \,.\, gxy))$ De (a) por (ii).

(2) De (b) por (iii).

Algo análogo ocurre con los enunciados (6)-(9) del § 49 y (11)-(15), (20)-(24), (28)-(30), (33) y (34) del § 47. Todos estos enunciados, aun cuando dependan de la notación, de los principios y de la ontología de la teoría de las clases, corresponden a esquemas demostrables dentro de la teoría pura de la cuantificación.

Podemos obtener esquemas de la teoría de la cuantificación análogos a (7) y (8) del § 46 y (16)-(19), (25)-(27), (31) y (32) del § 47, si tratamos '0' y 'V' como abreviaturas de las expresiones esquemáticas '$f \cap \overline{f}$' y '$f \cup \overline{f}$' respectivamente. En particular, el álgebra de las clases se reproduce de esta manera dentro de la teoría de la cuantificación.

También es fácil acomodar los abstractivos. El esquema análogo al (1) del § 49, por ejemplo, puede ser

$$(g``V)y = \sim (z) \sim gyz,$$

que es la abreviatura de

$$\sim (z) \sim (\sim (\sim fz \,.\, fz) \,.\, gyz) \equiv \sim (z) \sim gyz.$$

El caso del (2) del § 49 es semejante.

Los enunciados (9) y (10) del § 46 y (3) y (4) del § 49 hacen

uso de la notación de clase unitaria, omitida en la lista D2'-D20'. La causa de la omisión fue que el signo '=', usado entre pronombres como en D2, y no entre letras esquemáticas, se resiste a la definición dentro de la teoría pura de la cuantificación. Con todo, si consideramos la teoría de la cuantificación juntamente con la teoría de la identidad (expuesta, como en §§ 32-33, independientemente de la noción de pertenencia), podemos incluir en la lista D2'-D20' la definición

D7'. '$(\iota x)y$' *por* '$x = y$'.

Luego podemos formular, en correspondencia con el (3) del § 49, el esquema

$$(f``\iota z)\, y \equiv fyz,$$

abreviatura de

$$\sim (x) \sim (z = x \,.\, fyx) \equiv fyz,$$

el cual es un esquema válido, no en la teoría pura de la cuantificación, sino en la teoría de la identidad, como el esquema (J). Los casos (4) del § 49 y (9) y (10) del § 46 son similares.

En la teoría de la identidad, si no en la teoría pura de la cuantificación, podemos pues formular y establecer esquemas que corresponden a los 37 enunciados mencionados como teoremas de la teoría de las clases (y relaciones): (7)-(34) de §§ 46-47 y (1)-(9) de § 49. El contenido del § 50 puede incorporarse de la misma manera.

Tenemos pues, paralela a la teoría real de las clases (y relaciones) que hemos desarrollado anteriormente, una teoría virtual de las clases y relaciones, que no se funda sobre una idea de clase ni de pertenencia y que no implica cuestiones ontológicas. Esta teoría virtual no trata, en verdad, de clases ni de relaciones; las letras 'f', 'g', etc., aun cuando se comporten aproximadamente como si se refirieran a clases y relaciones, son letras esquemáticas, incapacitadas para figurar en cuantificadores o en enunciados. Las expresiones que contienen tales letras son esquemas, instrumentos del discurso sobre enunciados de una manera general. Podemos

conservar así todas las ventajas prácticas del álgebra de clases de algunos otros capítulos de las teorías de las clases y de las relaciones, sin abandonar el terreno de la lógica en sentido estricto, o sea, la teoría de la cuantificación. Sólo cuatro de los 37 enunciados citados exigen el agregado de la teoría de la identidad, y aun con este agregado el fundamento teórico se conserva independiente de supuestos ontológicos, en contraste con lo que se afirmó anteriormente (§ 42) respecto de la matemática.

Señalemos ahora los límites de la teoría virtual. La transición de un teorema de la teoría real a un esquema de la teoría virtual se funda en el uso de las letras esquemáticas 'f', 'g', etc., en lugar de los pronombres que desempeñaban el papel de 'x' en el contexto '$y \varepsilon x$' o '$x(y, z)$'. Así se evita el admitir ontológicamente las clases entre los objetos abarcados por los cuantificadores. Dado que las letras esquemáticas no pueden ocupar cuantificadores, es preciso que cualquier cuantificador cuyo pronombre sea sustituído por una letra esquemática, en el curso de semejante transición, desaparezca del contexto. Tal cuantificador puede desaparecer en el curso de transformaciones implícitas en las abreviaturas D2'-20', o puede desaparecer por figurar al comienzo del contexto íntegro, como desaparecieron, por ejemplo, los cuantificadores '(x)', '(y)' y '(z)' en el curso del tránsito del teorema (5) del § 49 al esquema (1) de este parágrafo. En cambio, si el cuantificador '(x)' de un teorema de la forma '$\ldots (x) \ldots y \varepsilon x \ldots$' no desapareciera de ninguna manera en el curso de la búsqueda de un esquema correspondiente al teorema, entonces (antes de terminar en seudoesquemas del tipo '$\ldots (f) \ldots fy \ldots$') debemos reconocer, simplemente, que el teorema se funda en la ontología de las clases, y ello de una manera tan esencial que no puede corresponder a ningún esquema de la teoría virtual de clases y relaciones. La aritmética contiene teoremas de este tipo, si bien los cuantificadores en cuestión están encubiertos a veces por abreviaciones. La aritmética se funda en la teoría real de las clases, con todas sus presuposiciones ontológicas.

Pero no por ello disminuye la importancia del hecho de que el álgebra de las clases y otras partes considerables de la teoría de

las clases y relaciones caben en la teoría virtual, de fundamento firme e indiscutible. Entre los teoremas de la teoría real que tienen esquemas correspondientes formulables en la teoría virtual, hay, sin embargo, algunos cuyos esquemas correspondientes no son válidos. Un ejemplo lo constituye

$$(3) \qquad (x) \qquad \sim (y)\ y \varepsilon x,$$

deducible de *2. El esquema correspondiente, '$\sim (y) fy$', no es válido; por el contrario, el enunciado '$\sim (y)\ y = y$', que tiene la forma '$\sim (y) fy$', es falso. Pero tales divergencias entre la teoría virtual y la parte correspondiente de la teoría real son sólo diferencias periféricas que no se reflejan en las aplicaciones prácticas de estas teorías.

La existencia del ejemplo (3) como teorema de la teoría real es el resultado de las restricciones impuestas al principio de abstracción con el fin de evitar contradicciones del tipo de (2) del § 45; por lo tanto, no siendo formulable en la teoría virtual ningún esquema correspondiente a las contradicciones de este tipo, las restricciones que llevan a (3) en la teoría real no se reflejan en la teoría virtual.

§ 52. *Números naturales*

Los números enteros positivos son normas de multiplicidad que se usan en el cálculo o en la enumeración de objetos. Para determinar que la clase de las repúblicas americanas posee 21 miembros, mencionamos alternadamente los diversos miembros de la clase y los primeros números sucesivos, estableciendo así una correspondencia entre los 21 países y los 21 primeros números. Por esto es natural considerar al número 21 como la clase de los 21 primeros números; por lo tanto, el proceso de enumeración de los países es un método para establecer que la clase de las repúblicas y la clase 21 son iguales en lo que respecta a la multiplicidad. El número 21 es una clase

de 21 miembros que es conveniente como norma de comparación. Los demás números son análogos.

Sería incurrir en un círculo vicioso tratar de definir el número *21* como la clase cuyos miembros son los números *1, 2,... 21*. Pero podemos romper este círculo si admitimos el número 0 como inicial. Con esto todo número n puede, sin incurrir en circularidad, definirse como la clase de los n primeros números. El número 0, como clase de los primeros 0 números, debe ser la clase vacía; este es el motivo por el cual elegimos el signo '*0*' para designar la clase vacía. El número *1*, como clase del primer número, será la clase $\iota 0$; el número *2*, como clase de los dos primeros números, será la clase $\iota 0 \cup \iota 1$ cuyos miembros son *0* y *1*; el número *3* será $\iota 0 \cup \iota 1 \cup \iota 2$, y así sucesivamente. Más brevemente, *2* es $1 \cup \iota 1$, *3* es $2 \cup \iota 2$ y, en general, el número que sucede a n es $n \cup \iota n$. (Esto se da incluso cuando $n = 0$, pues $0 \cup \iota 0 = \iota 0 = 1$; cf. (27) de § 47). Adoptaremos, por lo tanto, la serie de abreviaturas

D23 [33]. '*1*' *por* '$\iota 0$', '*2*' *por* '$1 \cup \iota 1$', '*3*' *por* '$2 \cup \iota 2$', etc.

Cada uno de los *números naturales* posee, pues, su definición. Pero aun tenemos que construir una definición de la noción general de número natural; o sea, tenemos que definir la clase *Nn* cuyos miembros son *0, 1, 2,* etc. La definición

'*Nn*' *por* '$\iota 0 \cup \iota 1 \cup \iota 2 \cup$ etc.'

no sirve, porque determina a '*Nn*' como abreviatura de una expresión que contiene la palabra 'etc.' que no hemos definido. El problema es formular la misma idea evitando la palabra 'etc.'. La solución, debida a Frege (1879), se funda en la consideración de que *Nn posee 0 como miembro y posee también el sucesor* $z \cup \iota z$ *de cada uno de sus miembros* z. Esta condición relativa a *Nn* no alcanza a determinar completamente a *Nn*, porque la misma condición también es satisfecha por toda clase a la que pertenezcan, además de los números naturales, otros objetos cualesquiera. Sin embargo,

[33] Esta manera de concebir los números naturales se debe a Von Neumann (1923).

Nn es la clase más restringida que satisface a la condición dada. Es la más estrecha de las clases y tales que

(1) $$0 \varepsilon y \,.\, (z) \sim (z \varepsilon y \,.\, \sim z \cup \iota z \varepsilon y).$$

Es la parte común a todas las clases y que satisfacen a (1). Por consiguiente, podemos definir Nn como la clase de los elementos x que pertenecen simultáneamente a todas las clases y que satisfacen a (1). O sea,

D24. $$\text{'}Nn\text{' por '}\hat{x}\,(y) \sim (0 \varepsilon y \,.\, (z) \sim (z \varepsilon y \,.\, \sim z \cup \iota z \varepsilon y) \,.\, \sim x \varepsilon y)\text{'}.$$

Dado que, según las definiciones anteriores, todo número natural es una clase incluída en cada uno de los números posteriores, las notaciones '$x \leqq y$' y '$x < y$' de inclusión de clases recobran sus sentidos aritméticos primordiales cuando x e y son números naturales.

Las definiciones de *suma, producto* y *potenciación* aritméticas se fundan en la noción de *potencia relativa* de una relación w, en el sentido siguiente:

$$w^0 = I, \quad w^1 = w, \quad w^2 = w \mid w, \quad w^3 = w \mid w \mid w, \text{ etc.}$$

Por ejemplo, si w es la relación de padre, w^2 será la relación de abuelo y w^3 la de bisabuelo. La característica de la suma aritmética es que $x + y$ es el sucesor del sucesor del sucesor... (y veces) de x; esto es, siendo w la relación de sucesor (la relación $\hat{u}\hat{v}(u = v \cup \iota v)$), $x + y$ es el objeto relacionado con x por w^y. Llegamos así a la definición

$$\text{'}x + y\text{' por '}(\iota z)\hat{u}\hat{v}(u = v \cup \iota v)^y\,(z, x)\text{'}.$$

Sobre la base de esta noción de suma, la de producto admite una definición similar; pues $x \cdot y$ es el resultado de agregar x, y veces, a 0.

$$\text{'}x \cdot y\text{' por '}(\iota z)\hat{u}\hat{v}(u = x + y)^y\,(z, 0)\text{'}.$$

Por último, la potencia aritmética $x \bigwedge y$ (usamos temporariamente

esta notación para evitar la confusión con la potencia relativa x^y) es el resultado de multiplicar 1, y veces, por x:

$$\text{‘}x \bigwedge y\text{’ por ‘}(\iota z)\hat{u}\hat{v}(u = x \cdot v)^v\,(z, 1)\text{’.}$$

La noción de potencia relativa, sobre la que se fundan estas tres definiciones, carece todavía de definición formal. Tal definición, adecuada no sólo a los casos ya tratados ‘w^0’, ‘w^1’, ‘w^2’, etc., sino al caso general ‘w^v’ de exponente pronominal, se construye de una manera parecida a la construcción que condujo a D24; se la omitirá en este lugar por ser una definición mucho más complicada [34].

Un principio central de la aritmética de los números naturales, empleado en la demostración de identidades familiares tales como ‘$x + y = y + z$’, ‘$x + 0 = x$’, etc., es el de *inducción matemática*, según el cual ‘fx’ se sigue de la conjunción de ‘$f0$’, ‘$(z) \sim (fz \,.\, \sim f(z \cup \iota z))$’, y ‘$x \varepsilon Nn$’. La forma fundamental de este principio es el teorema

$$(x)\,(y) \quad \sim (0 \varepsilon y \,.\, (z) \sim (z \varepsilon y \,.\, \sim z \cup \iota z \varepsilon y) \,.\, x \varepsilon Nn \,.\, \sim x \varepsilon y),$$

cuya demostración es inmediata en virtud de D24.

Pero este principio no permite sus aplicaciones usuales sin el apoyo de los teoremas ‘$0 \varepsilon Nn$’, ‘$1 \varepsilon Nn$’, ‘$2 \varepsilon Nn$’, etc. Estos teoremas se fundan, a su vez, en que 0, 1, 2, etc., son elementos. Para fundamentar la aritmética tenemos, pues, que agregar a *1-*3 otros dos axiomas:

(2) $\quad 0 \varepsilon V,$

(3) $\quad (x) \quad \sim (x \varepsilon V \,.\, \sim x \cup \iota x \varepsilon V).$

De estos axiomas podemos concluir que $0 \cup \iota 0 \varepsilon V$, o sea, $1 \varepsilon V$; de este resultado, junto con (3), podemos concluir que $2 \varepsilon V$, y así sucesivamente. Los dos axiomas nos obligan a aceptar una infinidad de elementos, y por consiguiente, también a aceptar ciertas clases infinitas (sean o no elementos), por ejemplo Nn y V. De ahí

[34] Véase mi *Mathematical Logic*, § 47.

que la aritmética —inclusive la de los números naturales— hace supuestos ontológicos más fuertes que las que hacen las ramas anteriores.

En lugar de adoptar *3 y (2)-(3), es más elegante adoptar

*3'. (x) $\iota x \varepsilon V$,

*4. (x) $\sim (x \varepsilon V \,.\, y \varepsilon V \,.\, \sim x \cup y \varepsilon V)$.

La demostración de (3), sobre la base de *3' y *4, es inmediata. La demostración de *3 también es fácil merced a D13. La demostración de (2), esbozada intuitivamente, es la siguiente: en virtud de *2 y (4) del § 45 existen no-elementos, y si x es uno de tales no-elementos, '$\iota x \varepsilon V$' se reduce a (2).

Obsérvese que *3' y *4 implican que toda clase finita '$\iota x \cup \iota y \cup \iota z \cup \ldots$' es elemento. En cambio, *3' y *4 no implican la existencia de ningún elemento infinito.

Para dar cuenta del uso enumerativo de los números naturales, todavía tenemos que formular lo que significa decir que una clase x tiene y miembros. Como observamos al comienzo, x tiene y miembros si hay una correspondencia entre los miembros de x y los miembros del número y. Esta correspondencia consiste en una relación z cualquiera entre los miembros de x y los de y, tal que nunca relaciona dos miembros de x con un miembro de y, ni un miembro de x con dos miembros de y; en resumen, una relación z tal que z y z^{-1} son unívocas (cf. § 50), $x = z``V$, e $y = z^{-1}``V$. Por consiguiente, adoptamos la definición

'$x\ sm\ y$' *por* '$\sim (z) \sim (z \mid z^{-1} \leqq I \,.\, z^{-1} \mid z \leqq I \,.\, x = z``V \,.\, y = z^{-1}``V)$'

En general, '$x\ sm\ y$', que se lee 'x es semejante a y', significa que las clases x e y tienen el mismo número de miembros; y si, en particular, $y \varepsilon Nn$, entonces '$x\ sm\ y$' significa simplemente que x tiene y miembros.

§ 53. *Construcciones ulteriores*

La más importante de las construcciones ulteriores es la que introduce los números reales, esto es, los números racionales y los irracionales. Entre las diversas definiciones, acaso la más conveniente [35] interpreta los números reales como ciertas relaciones entre números naturales. Por ejemplo, el número real $\sqrt{2}$ se identifica con la relación $\hat{y}\hat{z}(y \varepsilon Nn \,.\, z \varepsilon Nn \,.\, y \cdot y < 2 \cdot z \cdot z)$. Otro ejemplo: el número real 2 —o r^2, para distinguirlo del número natural 2— se interpreta como la relación $\hat{y}\hat{z}(y \varepsilon Nn \,.\, z \varepsilon Nn \,.\, y < 2 \,.\, z)$. En general, la idea intuitiva es la siguiente: todo número real x se identifica con la relación de cada número natural y a cada número natural z tal que, según las nociones intuitivas, $\frac{y}{z} < x$. Las consideraciones que guían la construcción general tendrán que dejarse de lado en esta obra; me limitaré a exponer sin comentarios la definición de la clase de los números reales:

$$\text{'}Nr\text{'} \textit{ por } \text{'}\hat{x}(x = \hat{y}\hat{z} \sim (u)\,(v) \sim (y \varepsilon Nn \,.\, z \varepsilon Nn \,.\, x(u, v) \,.\, y \cdot v < u \cdot z) \,.\, \sim x = \hat{y}\hat{z}(y \varepsilon Nn \,.\, z \varepsilon Nn))\text{'}.$$

Las notaciones '$x \leqq y$' y '$x < y$' de la inclusión de clases recobran sus antiguos sentidos aritméticos cuando x e y son números reales. La suma, el producto y la potenciación reciben nuevas definiciones al aplicárselas a los números reales, introduciéndose signos especiales '$_r+$', etc., durante las consideraciones teóricas.

Hasta ahora hemos dejado de lado los números negativos. Podríamos continuar las construcciones hasta incluir los números negativos y los números imaginarios, así como los números infinitos cardinales y ordinales, y las nociones de diferencial e integral, centrales en el "análisis" [36].

Ya con la incorporación de los números reales es preciso suplementar los axiomas *3' y *4 relacionados con 'ser elemento'. Ahora

[35] Debida a Whitehead y Russell. Cf, *Principia*, vol. 3, p. 336.
[36] Véase mi *Mathematical Logic*, § 52.

debemos tomar las medidas necesarias para que los números reales sean elementos. Para este fin basta un axioma según el cual toda relación entre números naturales es elemento:

$$*5. \qquad (x) \qquad \sim (x \leqq \overset{\wedge\wedge}{yz}(y \varepsilon Nn \,.\, z \varepsilon Nn) \,.\, \sim x \varepsilon V).$$

Mientras *3' y *4 implican que existen ciertas clases infinitas, pero no que existe un elemento infinito, *5 implica que existen ciertos elementos infinitos. Este contraste es fundamentalmente el mismo que habíamos consignado anteriormente, con palabras vagas, de la manera siguiente: la aritmética de los números naturales descansa únicamente sobre el concepto de infinito *potencial*, en tanto que la de los números reales descansa sobre el infinito *actual*.

Tenemos ya, para la teoría de las clases y la matemática que puede construirse dentro de esta teoría, un cuerpo infinito de axiomas. Cada una de las matrices de las formas *1-*2 ó, mejor, cada enunciado formado por aplicación de cuantificadores iniciales a una matriz semejante, constituye un axioma; y además de éstos tenemos los tres axiomas *3'-*5. Los enunciados implicados cuantificacionalmente por las conjunciones de estos axiomas son los teoremas. Pero esos axiomas no bastan para implicar o contradecir cada uno de los enunciados puros (cf. § 44), es decir, cada uno de los enunciados expresables en la notación dada. Queden enunciados matemáticos —incluso aritméticos— cuya demostración o refutación exigiría la adopción de axiomas aun más fuertes que los que hemos adoptado hasta este punto.

§ 54. *Otra crisis*

Sería deseable completar esa lista de axiomas, pero, como lo demostró Gödel (1931), no podemos completarla. Pasemos revista, de una manera general, a la naturaleza de este resultado y al razonamiento que lo sustenta.

Para que una sistematización de la lógica o de la matemática pueda usarse en la demostración de teoremas, no es preciso que suministre un *método mecánico* para decidir si una fórmula es

teorema (tal como, por ejemplo, el de las tablas de valores en la teoría de la composición); en cambio, es necesario que todo teorema tenga una demostración (aunque aún no haya sido descubierta) y que exista un *método mecánico* por el cual toda demostración, una vez hallada, pueda legitimarse. Esta idea del "método mecánico" admite una formulación exacta [37] que aquí omitiremos.

Consideremos la aritmética elemental de los números naturales Limitémonos a una notación aritmética muy pobre, que sólo conste de las notaciones de adición, multiplicación e identidad, juntamente con las notaciones usuales de negación, conjunción y cuantificación. Consideremos cualquier sistematización de esta aritmética. Supongamos, con arreglo a lo que acabamos de señalar, que exista un método mecánico para legitimar la demostración de teoremas.

El primer paso en la construcción debida a Gödel es numerar, de una manera sistemática —aunque sea arbitraria— cada uno de los enunciados del lenguaje aritmético elemental adoptado. De esta numeración resulta un paralelismo entre las propiedades formales de los enunciados y ciertas propiedades de los números naturales. A la propiedad de ser teorema, por ejemplo, le corresponde una propiedad numérica que poseen, precisamente, aquellos números que están correlacionados, según nuestra numeración general, con teoremas. Resulta, además, que esta propiedad numérica es puramente aritmética y hasta expresable dentro del lenguaje aritmético elemental que hemos adoptado. O sea que, en este lenguaje podemos construir cierta matriz larga y complicada —abreviémosla '$\Theta\ x$' —qué será satisfecha, precisamente, por los números x correlacionados con los teoremas.

Es claro que la manera de construir semejante matriz, dentro del lenguaje aritmético dado, dependerá de las siguientes circunstancias: 1.°, de los pormenores de la sistematización de la aritmética que hayamos adoptado, pues es la noción de teorema en esa sistematización la que tenemos que copiar en la construcción de la matriz aritmética '$\Theta\ x$'; 2.°, de la naturaleza de nuestra numeración arbi-

[37] Cf. Kleene, cap. XI.

traria de enunciados, pues es la regla de numeración la que determina la manera de "copiar" la noción de teorema en la construcción de '$\Theta\ x$'. Gödel estableció, sin embargo, que esta numeración puede hacerse de manera tal que posibilite la construcción de '$\Theta\ x$' dentro del lenguaje aritmético elemental, *cualquiera que sea* la sistematización de la aritmética que se adopte, con tal que admita (como ya lo hemos supuesto) un método mecánico para legitimar las demostraciones. Este razonamiento de Gödel se funda sobre la formulación exacta (que hemos mencionado hace un momento sin delinearla) del concepto de método mecánico.

En seguida, dadas la numeración de los enunciados, la sistematización de la aritmética y la construcción de '$\Theta\ x$', Gödel muestra cómo podemos calcular un número natural k que posee la propiedad siguiente: el número correlacionado al enunciado '$\sim \Theta\ k$' del lenguaje aritmético es k.

Tal es lo que se alcanza con la genial construcción de Gödel. Sólo nos queda por interpretar el resultado. '$\sim \Theta\ k$' será verdad si, y solamente si k no es el número de un teorema. Pero k era el número del propio enunciado '$\sim \Theta\ k$'. Vemos, pues, que este enunciado es verdadero sólo a condición de que no sea teorema. La supuesta sistematización de la aritmética o bien es viciosa y admite un teorema falso '$\sim \Theta\ k$', o no es completa, por omitir de los teoremas una verdad aritmética '$\sim \Theta\ k$' expresable por medio del dado lenguaje rudimentario de la aritmética [38].

Ninguna formulación de la noción de teorema puede abarcar todos los enunciados verdaderos formulables ni aún en esa paupérrima notación de la aritmética elemental, sin que al mismo tiempo involucre enunciados falsos. Lo mismo se da, *a fortiori*, para nuestra notación lógica, ya que ésta es adecuada para la expresión de la aritmética y mucho más.

Se diría que la verdad de un enunciado matemático consiste en la posibilidad de su demostración. No obstante, ese resultado de Gödel muestra que no puede existir una sistematización coherente

[38] Para los detalles de la construcción que se acaba de esbozar, véase mi *Mathematical Logic*, cap. 7.

de la matemática tal que cualquier enunciado matemático verdadero admita demostración. Siempre habrá enunciados matemáticos que no son ni demostrables ni refutables. ¿Qué queremos decir cuando los llamamos *enunciados*, y por lo tanto verdaderos o falsos? Aquí hay una crisis en la filosofía de la matemática. Ya no podemos culpar al favorito entre los animales expiatorios, el infinito actual, puesto que la dificultad se presenta inclusive en la aritmética de los números naturales, que sólo emplea el infinito potencial.

Esta es una segunda victoria de los obstinados que se rehusan a reconocer los objetos abstractos. Alcanzaron la primera cuando al encontrar dificultad en el principio de abstracción (§ 45), hubo que limitar el principio de alguna manera artificial. Abandonar la matemática clásica, aun incluída la aritmética elemental, sería un recurso por demás quijotesco. En cualquier caso debemos conservar la matemática clásica como instrumento conveniente, aun si juzgamos que las filas de ideogramas inherentes a este instrumento no son, literalmente, enunciados con sentido pleno.

Esta noción de una matemática instrumental sin pleno contenido, se presta muy bien para disipar el aire de misterio que envuelve al asunto. Que esos seudoenunciados se comporten como si poseyeran sentido sigue estando garantido, dentro de ciertos límites, por el uso de los métodos de la teoría de la cuantificación (cuyo sentido no ha sido puesto en duda) en la deducción de teoremas a partir de los axiomas adoptados. Desde este punto de vista no es de extrañar que varios de los axiomas, por ejemplo los que constituyen el principio restringido de abstracción (* 2), parecen particularmente artificiales; y si no podemos, compatiblemente con nuestros propósitos, fabricar axiomas capaces de fijar cada uno de los seudoenunciados como seudoverdadero o seudofalso, éste es un accidente que no choca con ningún prejuicio. Los seudoenunciados que así quedan indecisos siguen tratándose indistintamente como si fueran verdaderos o falsos, aun cuando ignoremos cuál de estos valores poseen. Podemos aumentar los axiomas cuando queramos, cuando encontremos que es de utilidad atribuirle seudoverdad a algunos de esos seudoenunciados restantes.

Lista de los principios más citados

(i) *inferencia de lo que está implicado composicionalmente*

(ii) *intercambio de equivalentes composicionales*

(iii) *intercambio de cláusulas de las formas* '$(x)\ (fx\ .\ gx)$' *y* '$(x)\ fx\ .\ (x)\ gx$' .

(iv) *cuantificación*

(v) *intercambio de cláusulas de las formas* '$\sim (p\ .\ \sim (x)\ fx)$' *y* '$(x) \sim (p\ .\ \sim fx)$'

(vi) *variación alfabética de un pronombre*

(vii) *conmutación de cuantificadores adyacentes*

(A) $\sim ((x)\ fx\ .\ \sim fy)$

(B) $\sim ((x)\ fx\ .\ (x) \sim fx)$

(C) $\sim ((x) \sim (fx\ .\ \sim gx)\ .\ (x)\ fx\ .\ \sim (x)\ gx)$

(D) $\sim (\sim (x) \sim (fx\ .\ gx)\ .\ (x) \sim fx)$

(E) $\sim (\sim (p\ .\ \sim (x)\ fx)\ .\ \sim (x) \sim (p\ .\ \sim fx))$

(F) $\sim ((x)\ (y)\ fxy\ .\ \sim (y)\ (x)\ fxy)$

(G) $\sim (\sim (y) \sim (x) \sim fxy\ .\ \sim (x) \sim (y)\ fxy)$

(H) $\sim (\ (x) \sim (gx\ .\ hx)\ .\ (x) \sim (fx\ .\ \sim gx)\ .\ \sim (x) \sim (fx\ .\ hx)\ )$

(I) $\sim ((x) \sim (gx \,.\, \sim hx) \,.\, (x) \sim (gx \,.\, \sim fx) \,.\, \sim (x) \sim gx \,.$

$(x) \sim (fx \,.\, hx))$

(J) $\sim (x = y \,.\, fx \,.\, \sim fy)$

(K) $(x)\ x = x$

(L) $(x)\ (y)\ (z) \sim (x = y \,.\, y = z \,.\, \sim x = z)$

(M) $(x)\ (y) \quad \sim (x = y \,.\, \sim y = x)$

(N) $(x) \quad \sim (y) \sim x = y$

(O) $\sim (\, y = (\iota\, x)\, fx \,.\, \sim (fy \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim x = y)))$

(P) $\sim (fy \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim x = y) \,.\, \sim y = (\iota\, x)\, fx)$

(Q) $\sim (\sim (y) \sim y = (\iota\, x)\, fx \,.\, (y)\, gy \,.\, \sim g\, (\iota\, x)\, fx$

* 1. $\sim ((z)\ (z \,\varepsilon\, x \equiv z \,\varepsilon\, y) \,.\, fx \,.\, \sim fy)$

* 1'. $(w)\ (x)\ (y) \sim ((z)\ (z \,\varepsilon\, x \equiv z \,\varepsilon\, y) \,.\, x \,\varepsilon\, w \,,\, \sim y \,\varepsilon\, w)$

* 2. $\sim (y) \sim (x)\ (x \,\varepsilon\, y \equiv (fx \,.\, \sim (z) \sim x \,\varepsilon\, z))$

* 3. $(x)\ (y) \sim (x \,\varepsilon\, V \,.\, \sim y \,\varepsilon\, V \,.\, \sim x ; y \,\varepsilon\, V)$

* 3'. $(x) \quad \iota\, x \,\varepsilon\, V$

* 4. $(x) \quad \sim (x \,\varepsilon\, V \,.\, y \,\varepsilon\, V \,.\, \sim x \cup y \,\varepsilon\, V)$

* 5. $(x) \quad \sim (x \leqq \hat{\hat{yz}}\, (y \,\varepsilon\, Nn \,.\, z \,\varepsilon\, Nn) \,.\, \sim x \,\varepsilon\, V) \,.$

Definiciones

D1. ‘$p \equiv q$’ *por* ‘$\sim (p \,.\, \sim q) \,.\, \sim (q \,.\, \sim p)$’

D2. ‘$x = y$’ *por* ‘$(z)\ (z \,\varepsilon\, x \equiv z \,\varepsilon\, y)$’.

D3. ‘$g\ (\iota\, x)\, fx$’ *por* ‘$\sim (y) \sim (gy \,.\, fy \,.\, (x) \sim (fx \,.\, \sim x = y))$’

D4. ‘$\hat{x}\, fx$’ *por* $(\iota\, y)\ (x)\ (x \,\varepsilon\, y \equiv (fx \,.\, \sim (z) \sim x \,\varepsilon\, z))$’.

D5. ‘V’ *por* ‘$\hat{x}\ (x = x)$’.

D6. ‘0’ *por* ‘$\hat{x} \sim x = x$’

D7. ‘$\iota\, x$’ *por* ‘$\hat{y}\ (y = x)$’

D8. ‘$\bar{x}$’ *por* ‘$\hat{y} \sim y \,\varepsilon\, x$’.

D9. ‘$x \cap y$’ *por* ‘$\hat{z}\ (z \,\varepsilon\, x \,.\, z \,\varepsilon\, y)$’.

D10. ‘$x \cup y$’ *por* ‘$\overline{\bar{x} \cap \bar{y}}$’.

D11. ‘$x \leqq y$’ *por* ‘$x = x \cap y$’.

D12. ‘$x < y$’ *por* ‘$x \leqq y \,.\, \sim x = y$’.

D13. ‘$x\,;\,y$’ *por* ‘$\iota\iota\, x \cup \iota\, (\iota\, x \cup \iota\, y)$’.

D14. ‘$w\ (x\,,\,y)$’ *por* ‘$x; y \,\varepsilon\, w \,.\, x \,\varepsilon\, V \,.\, y \,\varepsilon\, V$’.

D15. ‘$\hat{x}\hat{y}\, fxy$’ *por* ‘$(\iota\, z)\ (x)\ (y)\ (z\ (x\,,\,y) \equiv (fxy \,.\, x \,\varepsilon\, V \,.\, y \,\varepsilon\, V))$’

D16. ‘$w\ (x, y, z)$’ *por* ‘$x\,;\,(y\,;\,z) \,\varepsilon\, w \,.\, x \,\varepsilon\, V \,.\, y \,\varepsilon\, V \,.\, z \,\varepsilon\, V$’.

D17. '$\hat{x}\hat{y}\hat{z}\, fxyz$' *por* '$(\iota w)\,(x)\,(y)\,(z)\;(w\,(x\,,y\,,z\,) \equiv (fxyz\,.\,x \in V\,.\,y \in V\,.\,z \in V))$'

D18. 'x^{-1}' *por* '$y\,\hat{z}\,\hat{x}\,(z\,,y)$'.

D19. 'x "y' *por* '$\hat{z} \sim (w) \sim (w \in y\,.\,x\,(z\,,w))$'

D20. '$x \mid y$' *por* '$\hat{z}\hat{w} \sim (v) \sim (x\,(z\,,v)\,.\,y(v\,,w))$'.

D21. 'I' *por* '$\hat{x}\hat{y}\,(x = y)$'.

D22. 'x_y' *por* '$\hat{z}\hat{w}\,(x\,(z\,,w)\,.\,z \in (y \text{ "} V) \cup (y \text{ "} V)\,.\,w \in (y \text{ "} V) \cup (y^{-1} \text{ "} V))$'.

D23. '1' *por* '$\iota\, 0$', '2' *por* '$1 \cup \iota\, 1$', '3' *por* '$2 \cup \iota\, 2$', etc.

D24. 'Nn' *por* '$\hat{x}\,(y) \sim (0 \in y\,.\,(z) \sim (z \in y\,.\sim z \cup \iota z \in y)\,.\sim x \in y)$'.

Bibliografía

Ackermann, véase Hilbert.

Behmann, Heinrich, "Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem". *Mathematische Annalen*, vol. 86 (1922), pp. 163-229.

Berkeley, E. C., "Boolean Algebra and applications to insurance", *Record* (American Institute of Actuaries), vol. 26 (1937), Part III, pp. 373-414.

Bernays, véase Hilbert.

Boole, George, *The Mathematical Analysis of Logic*. Londres y Cambridge (Inglaterra), 1847. Reproducido en *Collected Logical Works*, Chicago y Londres, 1916.

— *An Investigation of the Laws of Thought*. Londres. 1854. Reimpreso ibidem. (Hay una reedición popular de Dover. N. del T.)

Cantor, Georg, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, compiladas por Ernst Zermelo. Berlín, 1932. (Algunas de estas memorias han aparecido en inglés con el título *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers;* hay una reedición popular de Dover. N. del T.)

Carnap, Rudolf, *The Logical Syntax of Language*. Londres y Nueva York, 1937.

— "Testability and Meaning", *Phiposophy of Science*, vol. 3

(1936), pp. 419-471; vol. 4 (1937), pp. 1-40. (Reproducido con algunas omisiones en H. Feigl y M. Brodbeck (compiladores), *Readings in the Philosophy of Science*, Nueva York, 1953. (N. del T.)

Church, Alonzo, *A Bibliography of Symbolic Logic*. Providence, 1938.
Reimpreso del *Journal of Symbolic Logic* (1936, 1938).
— *Introductión to Mathematical Logic*, vol. 1, Princeton, 1956.
— "A Note on the Entscheidungsproblem", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1 (1936), pp. 40-41, 101-102.

Cooley, J. C., *A Primer of Formal Logic*. Nueva York, 1942.

Curry, H. B., "Grundlagen der kombinatorischen Logik", *American Journal of Mathematics*, vol. 52 (1930), pp. 509-536, 789-834.

De Morgan, Augustus, *Formal Logic: or, the Calculus of Inference, Necessary and Problematic*. Londres, 1847.
— "On the Syllogism and on the Logic of Relations". *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 10 (1864), pp. 331-358. (Expuesto en 1860).

Ferreira da Silva, Vicente. *Elementos de Lógica Matemática*. San Pablo, 1940.

Frege, Gottlob, *Begriffsschrift*. Halle, 1879
— *Die Grundlagen der Arithmetik*. Breslau, 1884. Reimpreso en 1934. Publicado junto con la traducción inglesa de J. L. Austin con el título *Foundations of Arithmetic*, Oxford, 1953.
— *Grundgesetze der Arithmetik*. Vol. 1, 1893; vol. 2, Jena, 1903.
— "Ueber Sinn und Bedeutung". *Zeitschrift der Philosophie und philosophischer Kritik*, n. s. vol. 100 (1892), pp. 25-50. Traducido en H. Feigl y W. Sellars (compiladores), *Readings in philosophical Analysis*, Nueva York, 1949; también en P. Geach y M. Black (compiladores), *Translations from the Philosophical Writings of G. Frege*, Oxford, 1952.

Gödel, Kurt, *On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems*. Mimeografiado. Princeton, 1934.

— *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*. Princeton, 1940.

— "Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 37 (1930), pp. 349-360.

— "Ueber formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme". Ibidem, vol. 38 (1931), pp. 173-198.

Grelling, Kurt, y Leonard Nelson, "Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti. Bemerkungen zur Vorstehenden Abhandlung von Gerhard Hessenberg". *Abhandlungen der Frieschen Schule*, n. s., vol. 2 (1907-8), pp. 300-334.

Herbrand, Jacques, *Recherches sur la théorie de la demonstration*, Varsovia, 1930

Hilbert, David, y Wilhelm Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*. Berlín, 1928; 3ª. ed., 1949. (Hay traducción inglesa, con el título *Principles of Mathematical Logic*. Nueva York, 1950. (N. del T.)

— y Paul Bernays. *Grundlagen der Mathematik*, 2 vols. Berlín, 1934 y 1941.

Huntington, E. V., *The Continuum*. Cambridge, Mass., 1917. (Hay reedición popular de Dover. N. del T.)

Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam y Nueva York, 1952.

Kuratowski, Casimir, "Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles", *Fundamenta mathematicae*, vol. 2 (1921), pp. 161-171.

Langford, véase Lewis.

Lewis, C. I., *A Survey of Symbolic Logic*. Berkeley, 1918.
— y C. H. Langford, *Symbolic Logic*. Nueva York, 1932. (Hay reedición de Dover. N. del T.)
Löwenheim, Leopold, "Ueber Möglichkeiten im Relativkalkül", *Mathematische Annalen*, vol. 76 (1915), pp. 447-470.
Lukasiewicz, Jan, "O logice trojwartosciowej", *Ruch Filozoficznej*, vol. 5 (1920), pp. 169-171.
— "Uwagi o aksiomacie Nicod'a i o 'dedukcyi uogólniajacej' ", *Ksiega Pamiatkowa Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie*, Lvov, 1931.

Neumann, J. V., "Zur Einführung der transfiniten Zahlen", *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae*, Sectio math., vol. 1 (1923), pp. 199-208.
— "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 154 (1925), pp. 219-240 Corrección en vol. 155, p. 128.
Nicod, Jean, "A Reduction in the Number of Primitive Propositions of Logic", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 19 (1917-20), pp. 32-41.

Peano, Giuseppe, *Formulaire de mathématiques*. Introducción, 1894; vol. 1, 1895; vol. 2, 1897-9. Torino. Vol. 3, 1901, París. Vol. 4, 1902-3; vol. 5 (s. v. *Formulario matemático*), 1905-8.Torino.
Peirce, C. S., *Collected Papers*. Compilados por C. Hartshorne y P. Weiss. 6 vols. Cambridge, Mass., 1931-5.
Post, E. L., "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", *American Journal of Mathematics*, vol. 43 (1921), pp. 163-185.

Quine, W. V., *A System of Logistic*. Cambridge, Mass., 1934.
— *Mathematical Logic*. Nueva York, 1940. Edición revisada: Cambridge, Mass., 1951.

— *Methods of Logic*, New York, 1950
— *From a Logical Point of View*, Cambridge, Mass., 1953.
— "Truth by Convention". *Philosophical Essays for A. N. Whitehead* (Nueva York, 1936), pp. 90-124. (Reimpreso en *Readings in Philosophical Analysis*, compilado por H. Feigl y W. Sellars. New York, 1949. N. del T.)
— "Relations and Reason", *Technology Review*, vol. 41 (1939), pp. 299-301, 324-327.
— "Completeness of the propositional Calculus", *Journal of Symbolic Logic*, vol. 3 (1938), pp. 37-40.
— "Element and Number", ibidem, vol. 6 (1941), pp. 135-149.
— "On Existence Conditions for Elements and Classes", ibidem, vol. 7 (1942), pp. 157-159.
— "Whitehead and the Rise of Modern Logic", *The Philosophy of A. N. Whitehead*. Evanston, Illinois, 1941, pp. 127-163.

Reichenbach, Hans, *Wahrscheinlichkeitslehre*. Leyden, 1935. (Ed. en inglés, con agregados, con el título *The Theory of Probability*, Berkeley, 1949. N. del T.)

Rosser, Barkley, *Logic for Mathematicians*, New York, 1953.
— "The Independence of Quine's Axioms *200 and *201, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 6 (1941), pp. 96-97.

Russell, Bertrand (véase también Whitehead). *The Principles of Mathematics*. Cambridge, 1903. 2ª. ed., Nueva York, 1938. (Hay traducción española con el título *Los principios de la matemática*, Buenos Aires, 1948, N. del T.)
— *Introduction to Mathematical Philosophy*. Londres, 1919 y 1920.
— "On Denoting", *Mind*, vol. 14 (1905), pp. 479-493.
— "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types" *American Journal of Mathematics*, vol. 30 (1908), pp. 222-262.

Schröder, Ernst, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. Vol. 1, 1890; vol. 2, 1891-1905; vol. 3, 1895. Leipzig.

Shannon, C. E., "A Symbolic Analysis of Relay and Switching

Circuits", *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 57 (1938), pp. 713-723.

Sheffer, H. M., "A Set of Five Independent Postulates for Boolean Algebra", *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 14 (1913), pp. 481-488.

Skolem, Thoralf, "Ueber einige Grundlagenfragen der Mathematik", *Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo*, I. Klasse, 1929, N.° 4.

Tarski, Alfred, *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, Nueva York, 1941. (Hay traducción española con el título *Introducción a la Lógica y a la metodología de las ciencias deductivas*, Buenos Aires y México, 1951. N. del T.)

— *Logic, Semantics, Methamathematics*, Oxford, 1956.

— (y otros) *Undecidable Theories*, Amsterdam, 1953.

Whitehead, A. N., *A Treatise on Universal Algebra*. Cambridge 1898.

— "On Cardinal Numbers", *American Journal of Mathematics*, vol. 24 (1902), pp. 367-394.

— y Bertrand Russell, *Principia Mathematica*. 3 vols. Cambridge 1910-1913. 2ª. ed. 1925-1927.

Wiener, Norbert, "A Simplification of the Logic of Relations", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 17 (1912-14), pp. 387-390.

Wittgenstein' Ludwig, *Tractatus Logico-Philosophicus*. Londres y Nueva York, 1922. (Hay traducción española con el título *Tratado Lógico-Filosófico*, Madrid 1957, N. del T.)

Zermelo, Ernst. "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I", *Mathematische Annalen*, vol. 65 (1908), pp. 261-281.

Este libro se terminó de imprimir el día 24 de octubre de 1958 en la Imprenta López, Perú 666, Buenos Aires, República Argentina

Colección Interciencia

Lo que hemos denominado aquí "Interciencia" no es una disciplina especial, ni un movimiento en el sentido estricto del término. Podríamos llamarla, más bien, una nueva actitud conceptiva. Ella surge del complejo desarrollo alcanzado por las más importantes disciplinas científicas y de la necesidad de vincular de un modo coherente la cantidad de información acumulada. En efecto, es frecuente que en el desarrollo de las últimas etapas de una investigación, ésta trascienda los límites de su ámbito específico para ponerse en contacto con otras esferas del conocimiento. Tal es el caso de la lógica matemática y las ciencias físicas o biológicas, de la cibernética y la psicofisiología, de ciertas teorías matemáticas y el grupo de ciencias de la conducta humana (antropología, psicología y sociología).

Hemos citado sólo algunos de los ejemplos más importantes, pero la situación se repite dentro de cada una de las ciencias citadas y, en volumen creciente, al promoverse cualquier estudio objetivo. La interciencia, sin embargo, no posee aún un fundamento teórico codificado pues, como doctrina, se manifiesta en la praxis. En este último plano pretende sólo conectar distintas especialidades científicas, manteniendo el rango propio de cada una de ellas. No trata de crear una superciencia rectora de las demás, sino que plantea conexiones en aspectos contingentes de las ciencias y no necesariamente en su totalidad. Por ello decimos que la interciencia es, hasta el presente, una actitud.

El enciclopedismo y su continuación positivista creían en la posibilidad de que el individuo alcanzara un conocimiento "comprensivo" del mundo informándose de la generalidad de sus manifestaciones. Si ello pudo ser factible en el siglo pasado, hoy, la acumulación de datos acerca del hombre y la naturaleza, y el consiguiente fraccionamiento del saber, han destruído tal posibilidad.

Varias doctrinas filosóficas contemporáneas han intentado resolver esta situación reconquistando —dentro de ciertas condiciones— una concepción integral del mundo. La interciencia aspira, en un marco más modesto, a algo similar. Desea recuperar para el "split-man", el hombre fraccionado de hoy, atraído por múltiples intereses, la condición fecunda, creadora, y aspira a devolverle la posibilidad de conocer "intensivamente", desde un área científica dada, dinámica, que pueda irradiarse a las adyacentes y aun a las más lejanas.

A tal finalidad responde esta colección. En ella se tratarán, en forma progresiva, los temas más importantes que abarca la interciencia, así como las especialidades técnicas que, dentro de su campo respectivo, se hallen planteadas en forma interdisciplinaria: la sociología empírica dentro de la sociología general, la lógica matemática dentro de los metalenguajes técnicos, etc.